УДК 536.2.001.24

Використання методу інтегральних співвідношень для аналітичного розв’язку гіперболічних моделей теплопровідності

Ю. В. Човнюк[1], В. Т. Кравчук[2], А. С. Москвітіна[3], И. А. Пефтєва[4]
[1]к.т.н., доц. Національний університет біоресурсів і природокористування України, м. Київ, Україна, ychovnyuk@ukr.net, ORCID: 0000-0002-0608-0203
[2]к.т.н., доц. Київський національний університет будівництва і архітектури, м. Київ, Україна, vtk1@ukr.net, ORCID: 0000-0002-5213-3644
[3]асист. Київський національний університет будівництва і архітектури, м. Київ, Україна, moskvitina.as@knuba.edu.ua, ORCID: 0000-0003-3352-0646
[4]асист. Київський національний університет будівництва і архітектури, м. Київ, Україна, piefteva.io@knuba.edu.ua, ORCID: 0000-0002-8858-9010

Анотація. Вивчення процесів нестаціонарної теплопровідності – важливий напрямок, який використовується в прикладних задачах тепломасообміну. При розв’язанні математичної моделі при різних граничних умовах є проблема достовірності чисельних розрахунків, тому є необхідність в вирішенні математичної моделі аналітичним методом. Наприклад, математична модель процесів тепломасообміну в акумуляторі теплоти при його заряді та розряді вирішується аналітично методом функції Гріна, аналогічно вирішується математична модель процесів нагрівання теплоносія в сонячних колекторах. Запропонований розвиток методу функцій Гріна задля розв’язку граничних задач нестаціонарної теплопровідності узагальненого типу на основі закону Максвелла-Каттанео-Ликова. Сформульовані граничні умови у відповідності зі вказаним законом. Запропоновані інтегральні співвідношення для аналітичних розв’язків граничних задач нестаціонарної теплопровідності для рівнянь гіперболічного типу. Розглянуті ілюстративні задачі для напівнескінченної області й описані область теплового сліду й незбурена область.

Ключові слова: математична модель теплопровідності, нестаціонарна теплопровідність, інтегральні співвідношення, аналітичні розв’язки, гіперболічна модель, теплопровідність, закон Максвелла-Каттанео-Ликова.

Вступ. Вивчення процесів нестаціонарної теплопровідності, розрахунок параметрів середовищ в умовах нестаціонарної теплопровідності останніх – важливий напрямок, який використовується в прикладних задачах тепломасообміну. При розв’язанні математичної моделі при різних граничних умовах є проблема достовірності чисельних розрахунків, тому є необхідність в вирішенні математичної моделі аналітичним методом. Наприклад, математична модель процесів тепломасообміну в акумуляторі теплоти при його зарядженні та розрядженні розв’язується аналітично методом функції Гріна [1]. Аналогічно вирішується математична модель процесів нагрівання теплоносія в сонячних колекторах.

Актуальність дослідження. Розроблення ефективних і достовірних методів математичного моделювання нестаціонарної теплопровідності є актуальною задачею для будівельної теплофізики, розроблення тепломасообмінних апаратів, дослідження циклічних навантажень на елементи теплогенераторів від теплового розширення тощо.

Останні дослідження та публікації. Рівняння енергії для ізотропних твердих тіл

$$c\cdot\rho\cdot\frac{\partial T(M,t)}{\partial t}=-\{\vec{q}(M,t)\}+F(M,t),\ \text{Вт/м}^2,$$

$$M\in D,\ t>0, \quad (1)$$

де c – питома теплоємність, Дж/(кг·К); ρ – густина матеріалу, кг/м^3; t – час, с, T – температура, К, $\vec{q}$ – густина теплового потоку, Вт/м^3; F – функція, що описує вплив зовнішніх джерел теплоти, Вт/м^3; $M=M(x,y,z)$ – точка простору декартової системи координат x, y, z, м. Вектор $\vec{q}(M,t)$ має вид класичної залежності Фур’є [2] $\vec{q}(M,t)=-\lambda\cdot grad\{T(M,t)\}$, кг/м^3, де λ – коефіцієнт теплопровідності, Вт/(м·К). Одиничний розмірний коефіцієнт не наведено. Це призводить до рівняння параболічного типу для нестаціонарного теплопереносу

$$\frac{\partial T}{\partial t}=a\cdot\Delta T(M,t)+\frac{1}{c\rho}\cdot F(M,t),\ \text{К/с},$$

$$M\in D,\ t>0, \quad (2)$$

де $a=\lambda/(c\rho)$ – коефіцієнт температуропровідності, м2/с. Граничні умови

$$T(M,t)|_{t=0}=\Phi_0(M),\ M\in D,\ \text{К} \quad (3)$$

$$\beta_1 \cdot \frac{\partial T(M,t)}{\partial n} + \beta_2 \cdot T(M,t) = \varphi(M,t),\ \text{К},$$

$$\beta_1 \cdot \frac{\partial T(M,t)}{\partial n} + \beta_2 \cdot T(M,t) = \varphi(M,t),\ \text{К},$$
$$t \ge 0,\ M \in S, \qquad (4)$$

де D – скінченна або частково обмежена опукла область зміни $M(x,y,z)$; S – кусково-гладка поверхня, яка обмежує область D; $\vec{n}$ – зовнішня нормаль до S, $\overline{\Omega} = (M \in D, t > 0)$ – циліндрична область у фазовому просторі (x, y, z, t) з основою D при $t = 0$, β_1 і β_2 – коефіцієнти. Параметри, які входять у (2)...(4) належать класу функцій: $F(M,t) \in C^0(\overline{\Omega})$, $\Phi_0(M) \in C^1(\overline{\Omega}), \varphi(M,t) \in C^0(S \times t \ge 0)$. Шуканий розв'язок $T(M,t) \in C^2(\overline{\Omega}) \cap C^0(\overline{\Omega})$, $grad_M\{T(M,t)\} \in C^0(\overline{\Omega});\ \beta_1^2 + \beta_2^2 > 0$.

У силу принципу суперпозиції, який справедливий для лінійних задач переносу, можна записати інтегральне представлення для $T(M, t)$ у вигляді [2]:

$$T(M,t) = \iiint_D \Phi_0(P) G(M,P,t,\tau)\big|_{\tau=0} \cdot dV_p +$$
$$+ a \cdot \int_0^t \iint_S \left\{ G\frac{\partial T}{\partial n_p} - T\frac{\partial G}{\partial n_p} \right\}\Bigg|_{P \in S} \cdot d\tau d\delta_p +$$
$$+ \int_0^t \iiint_D \frac{1}{c\rho} \cdot F(P,\tau) \cdot G(M,t,P,\tau) d\tau dV_p,\ \text{К},$$

де $G(M, t, P, \tau)$ – відповідна функція Гріна для даної області як розв'язок більш простої задачі для однорідного рівняння (2) з однорідними граничними умовами того ж виду, що й (4), а саме

$$\frac{\partial G}{\partial t} = a \cdot \Delta_M G(M,t,P,\tau),\ M \in D, t > \tau; \qquad (5)$$

$$G(M,t,P,\tau)\big|_{t=\tau} = \delta(M,P), (M,P) \in D; \qquad (6)$$

$$\beta_1 \cdot \frac{\partial G(M,t,P,\tau)}{\partial n} + \beta_2 \cdot G(M,t,P,\tau) = 0,$$
$$M \in S, t > 0, \qquad (7)$$

Тут $\delta(M, P)$ – дельта функція П.Дірака. Якщо область D обмежена, тоді функція Гріна G має вигляд

$$G(M,t,P,\tau) = G(M,t-\tau,P) =$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\psi_n(M) \cdot \psi_n(P)}{\|\psi_n\|^2} \times \exp\left[-\left(\sqrt{a}\gamma_n\right)^2 (t-\tau)\right], \qquad (8)$$

де $\psi_n(M)$ та γ_n – власні функції й власні значення відповідної для (2)...(4) однорідної задачі

$$\begin{cases} \Delta\psi(M) + \gamma^2 \cdot \psi(M) = 0, M \in D, \\ \beta_1 \cdot \dfrac{\partial \psi(M)}{\partial n} + \beta_2 \cdot \psi(M) = 0, M \in S; \end{cases} \qquad (9)$$

$\|\psi_n\|^2$ – квадрат норми власних функцій, а саме

$$\|\psi_n\|^2 = \iiint_D \psi_n^2(M) dV_M; \qquad (10)$$

Δ - оператор Лапласа.

Усякий випадок знаходження функції Гріна відповідної граничної задачі для тієї чи іншої області доволі важливий. Він утримує великий обсяг інформації та дозволяє виписувати велику кількість аналітичних розв'язків у вигляді інтегрального співвідношення (5) у залежності від неоднорідності у (2)-(4). Аналітичні розв'язки граничних задач (2)-(4) показують, що швидкість розповсюдження теплоти у середовищах, які вивчаються, є нескінченною за величиною. Не дивлячись на деякі парадокси при використанні модельних уявлень (2)-(4) [3], останнє не обмежує область застосування граничних задач (2)-(4) як предмет практично неосяжного числа досліджень. Останні охоплюють усе нові змістовні математичні об'єкти й все більше число найрізноманітніших прикладних задач [2,5], враховуючи розроблені аналітичні методи, котрі дають точні аналітичні розв'язки задач (2)-(4) у вигляді (5). Розглянемо далі наявні гіперболічні моделі теплопровідності.

У останні десятиліття XXI століття у зв'язку з вивченням високоінтенсивних та інших процесів зростає інтерес до гіперболічних моделей нестаціонарної теплопровідності на основі узагальненого закону Максвелла-Каттанео-Ликова [4]:

$$\vec{q}(M,t) = -\lambda\, grad\{T(M,t)\} - \tau_r \frac{\partial \vec{q}(M,t)}{\partial t},$$
$$\text{Вт/м}^2, \qquad (11)$$

де τ_r – час релаксації теплового потоку, с, пов'язаний зі швидкістю розповсюдження теплоти.

Цей закон враховує скінченну швидкість розповсюдження теплоти. Співвідношення (11) має простий фізичний зміст: при виникненні у середовищі градієнта температури необхідний деякий час для встановлення теплового потоку, а також тепловий потік не може зникнути миттєво, а затухає за час релаксації. Аналізуючи узагальнену задачу теплопровідності для напівпростору, граничне значення температури котрого змінюється у початковий момент часу на деяку величину, залишаючись у подальшому постійним, О. В. Ликов дав обґрунтування фізичного змісту скінченної швидкості розповсюдження теплоти, яка є похідною за часом від глибини проникнення теплоти. Вирази (1) та (2) приводять до рівняння переносу гіперболічного типу:

$$\frac{\partial T(M,t)}{\partial t}=a\cdot\Delta T(M,t)-\tau_r\frac{\partial^2 T(M,t)}{\partial t^2}+$$

$$+\frac{\tau_r}{c\cdot\rho}\left[\frac{\partial F(M,t)}{\partial t}+\frac{1}{\tau_r}F(M,t)\right],\ \text{К/с},$$

$$M\in D,\ t>0 \qquad (12)$$

й відповідним граничним задачам теплопровідності для рівняння (12) узагальненого виду. Узагальнені задачі переносу суттєво відрізняються від класичних (2)-(4), оскільки є більш складними при знаходженні аналітичних розв'язків цих задач. Тому маємо на сьогодні доволі незначні успіхи у знаходженні точних аналітичних розв'язків граничних задач для рівняння (12).

Знайдені розв'язки у багатьох випадках мають неточності, як у самих функціональних конструкціях цих розв'язків, так і у вихідній постановці задачі. Для рівняння (12) частіше використовуються класичні граничні умови (4), а не інтегральна (чи диференціальна) форма запису цих умов, що випливає із узагальненого закону (11). На необхідність виконання відповідності граничних умов для рівняння (12) закону (11) звертали увагу автори [5, 6], але низка питань залишилась ще відкритою. Саме ці питання розглянемо нижче.

Співвідношення (11) для точок $M\in S$ записуємо у вигляді:

$$[\vec{n}\times\vec{q}(M,t)]=-\lambda\frac{\partial T(M,t)}{\partial\vec{n}}-$$

$$-\tau_r\frac{\partial[\vec{n}\times\vec{q}(M,t)]}{\partial t},\ \text{Вт/(м}^2\text{)},$$

$$t>0. \qquad (13)$$

Приймаючи до уваги, що тепловий потік через граничну поверхню S області D, у відповідності з законом Ньютона [2], пропорційний різниці температур поверхні й зовнішнього середовища, матимемо:

$$[\vec{n}\times\vec{q}(M,t)]=\alpha\cdot[T(M,t)-\varphi(M,t)],\ \text{Вт/м}^2,$$

$$M\in S,\ t>0, \qquad (14)$$

де α – коефіцієнт тепловіддачі, Вт/(м^{2}К).

Виражаємо з (14) величину $[\vec{n}\times\vec{q}(M,t)]$ через температуру, враховуючи, що у початковий момент часу $\vec{n}\times\vec{q}(M,t)\big|_{t=0}=0$, $M\in S$. Маємо

$$[\vec{n}\times\vec{q}(M,t)]=\frac{-\lambda}{\tau_r}\cdot\int_0^t\frac{\partial T(M,t)}{\partial n}\times$$

$$\times\exp\left\{\frac{-t-\tau}{\tau_r}\right\}d\tau,\ \text{Вт/м}^2,$$

$$M\in S,\ t>0. \qquad (15)$$

Тоді з (14) й (15) приходимо до інтегральної форми запису граничних умов третього роду (нагрівання чи охолодження середовищем):

$$\frac{1}{\tau_r}\int_0^t\frac{\partial T(M,t)}{\partial n}\cdot\exp\left[\frac{-t-\tau}{\tau_r}\right]d\tau=$$

$$=-h[T(M,t)-\varphi(M,t)],$$

$$M\in S,\ t>0, \qquad (16)$$

де $h=\alpha/\lambda$, м$^{-1}$.

При $1/h\to 0$ або $\alpha\to\infty$ з рівняння (16) випливає гранична умова першого роду (температурний нагрів чи охолодження):

$$T(M,t)=\varphi(M,t),\ \text{К},$$

$$M\in S,\ t>0. \qquad (17)$$

У випадку граничної умови другого роду (температурний нагрів чи охолодження):

$$[\vec{n}\times\vec{q}(M,t)]=\varphi(M,t),\ \text{К},$$

$$M\in S,\ t>0. \qquad (18)$$

З рівнянь (18) і (15) знаходимо інтегральну форму запису граничної умови другого роду:

$$\frac{1}{\tau_r}\int_0^t \frac{\partial T(M,t)}{\partial n}\cdot \exp\left[\frac{-t-\tau}{\tau_r}\right] d\tau =$$

$$= -\frac{1}{\lambda}\varphi(M,t), \text{ м·К/Вт},$$

$$M \in S, t>0. \qquad (19)$$

При розгляді конкретних задач у ряді випадків інтегральну форму запису граничних умов другого чи третього роду доцільно перевести у диференціальну, еквівалентну інтегральній. Однак тут слід проявляти обережність, оскільки формальне диференціювання співвідношень (16) й (19) (по змінній *t*) може призвести до умови, не еквівалентної вихідній (інтегральній), наприклад, коли $\varphi(M,t)=\varphi_0=const$. У даному випадку такий перехід слід проводити застосовуючи, що зліва у (17) та (20) записані вирази типу згортки. Знаходимо диференціальну форму запису:

- граничні умови третього роду

$$\frac{\partial T(M,t)}{\partial n} =$$

$$= -h\left(1+\tau_r\cdot\frac{\partial}{\partial t}\right)\left[T(M,t)-\varphi(M,t)\right], \text{ К/м},$$

$$M \in S, t>0; \qquad (20)$$

- граничні умови другого роду

$$\frac{\partial T(M,t)}{\partial n} = \frac{-1}{\lambda}\left(1+\tau_r\cdot\frac{\partial}{\partial t}\right)\varphi(M,t),$$

$$M \in S, t>0. \qquad (21)$$

Таким чином, гіперболічна модель переносу передбачає:

- рівняння нестаціонарної теплопровідності (12);
- початкові умови

$$\frac{\partial T(M,t)}{\partial n} = \frac{-1}{\lambda}\left(1+\tau_r\cdot\frac{\partial}{\partial t}\right)\varphi(M,t), \text{ К/м},$$

$$M \in \overline{D} = D+S; \qquad (22)$$

- одну з трьох граничних умов: першого роду (17), другого роду (19), третього роду (16).

Фізично другу початкову умову у (22) можна пояснити наступним чином. У області $\overline{D}$ змінної *M* початкова швидкість зміни температури відносно часу повинна дорівнювати нулю, оскільки з (11) випливає, що теплова хвиля розповсюджується в область *D* через скінченний проміжок часу.

Мета роботи полягає в обґрунтуванні інтегральних співвідношень задля аналітичних розв'язків гіперболічних моделей теплопровідності узагальненого типу на основі закону Максвелла-Каттанео-Ликова, а також граничних умов для задач нестаціонарної теплопровідності у відповідності зі вказаним законом.

Виклад основного змісту дослідження.

1. Метод функцій Гріна для граничних задач теплопровідності гіперболічного типу.

Розглянемо далі метод функцій Гріна для граничних задач нестаціонарної теплопровідності гіперболічного типу. Рівняння (12) запишемо у наступному виді:

$$\frac{\partial T(M,t)}{\partial t} = a\cdot\Delta T(M,t) - \tau_r\frac{\partial^2 T(M,t)}{\partial t^2} +$$

$$+\theta(M,t), \text{ К/с}, M \in D, t>0. \qquad (23)$$

де, $\theta(M,t)$ – відома функція, К/с.

Функція Гріна $G(M,t,P,\tau)$ за змінними (M,t) задовольняє умовам:

$$\frac{\partial G}{\partial t} = a\cdot\Delta_M G(M,t,P,\tau) - \tau_r\frac{\partial^2 G(M,t)}{\partial t^2},$$

$$M \in D, t>\tau. \qquad (24)$$

$$G(M,t,P,\tau)\big|_{t=\tau} = 0, (M,P)\in D; \qquad (25)$$

$$\left.\frac{\partial G(M,t,P,\tau)}{\partial t}\right|_{t=\tau} =$$

$$= \frac{1}{\tau_r}\delta(M,P), (M,P)\in D. \qquad (26)$$

а за змінними (P,τ):

$$\frac{\partial G}{\partial t} = a\cdot\Delta_M G(M,t,P,\tau) - \tau_r\frac{\partial^2 G(M,t)}{\partial t^2},$$

$$M \in D, t>\tau. \qquad (27)$$

$$G(M,t,P,\tau)\big|_{t=\tau} = 0, (M,P)\in D; \qquad (28)$$

$$\left.\frac{\partial G(M,t,P,\tau)}{\partial t}\right|_{t=\tau} =$$

$$=\frac{1}{\tau_r}\delta(M,P),(M,P)\in D. \qquad (29)$$

Співвідношення (25)-(30) мають важливе значення для подальших міркувань. Розглянемо рівність:

$$\frac{\partial y}{\partial x}[T(P,\tau)G(M,t,P,\tau)]=G\frac{\partial T}{\partial \tau}+T\frac{\partial G}{\partial \tau}=$$

$$=a[G\Delta T-T\Delta_p G]+\tau_r\left[T\frac{\partial^2 G}{\partial \tau^2}-G\frac{\partial^2 T}{\partial \tau^2}\right]+$$

$$+\theta(M,t)\cdot G(M,t,P,\tau). \qquad (30)$$

Рівність (30) проінтегруємо по $P\in D$ і перетворимо далі, використовуючи формулу Гріна для оператора Лапласа [2]. Матимемо:

$$\iiint_D \frac{\partial}{\partial \tau}[TG]dV_p=$$

$$=-a\iint_S\left(T\frac{\partial G}{\partial n_p}-G\frac{\partial T}{\partial n_p}\right)_{P\in S}d\delta_p+$$

$$+\iiint_D \frac{\partial}{\partial \tau}[TG]dV_p+$$

$$+\iiint_D \theta(P,\tau)\cdot G(M,t,P,\tau)dV_p \qquad (31)$$

Співвідношення (31) є справедливим для всіх τ < 1 і, відповідно, його можна проінтегрувати по τ для 0 < τ < 1, де ε > 0 – мала величина (нескінченно мала, $(0<\varepsilon\ll 1)$. Матимемо:

$$\int_0^{t-\varepsilon}\iiint_D \frac{\partial}{\partial \tau}[TG]dV_p-$$

$$-\int_0^{t-\varepsilon}\iiint_D \frac{\partial}{\partial \tau}\left(T\frac{\partial G}{\partial \tau}-G\frac{\partial T}{\partial \tau}\right)d\tau dV_p=$$

$$-a\int_0^{t-\varepsilon}\iint_S\left(T\frac{\partial G}{\partial n_p}-G\frac{\partial T}{\partial n_p}\right)_{P\in S}d\tau d\delta_p+$$

$$+\int_0^{t-\varepsilon}\iiint_D \theta(P,\tau)\cdot G(M,t,P,\tau)dV_p. \qquad (32)$$

При 0 < τ < 1 – ε підінтегральні функції зліва у (32) достатньо регулярні, оскільки усунута особливість функції *G*(*M, t, P, τ*) у точці *M* = *P* при *τ* = *t*. Змінюємо порядок інтегрування зліва й обчислюємо інтеграли (по *τ*, використовуючи (28), (29). Переходячи до межі при $\varepsilon\to 0$, із урахуванням співвідношення

$$\iiint_D T(P,\tau)\cdot\delta(P,M)dV_p=T(M,t),$$

знаходимо остаточне інтегральне представлення для аналітичних розв’язків через функцію впливу:

$$\Delta T(M,t)=\iiint_D\Big\{T(P,0)$$

$$-\tau_r\frac{\partial G(M,t,P,\tau)}{\partial \tau}\Big]_\tau=0+$$

$$+\tau_r\cdot\left[\frac{\partial T(P,\tau)}{\partial \tau}\cdot G(M,t,P,\tau)\right]_{\tau=0}\Big\}dV_p-$$

$$-a\cdot\int_0^t\iint_s\Big[T(P,\tau)\cdot\frac{\partial G(M,t,P,\tau)}{\partial n_p}-$$

$$-G(M,t,P,\tau)\cdot\frac{\partial(P,\tau)}{\partial n_p}\Big]_{P\in S}d\tau dV_p+$$

$$+\int_0^t\iiint_D\theta(P,\tau)\cdot G(M,t,P,\tau)d\tau dV_p.$$

$$\Delta T(M,t)=\iiint_D\Big\{T(P,0)\Big[G(M,t,P,\tau)-$$

$$-\tau_r\cdot\frac{\partial G(M,t,P,\tau)}{\partial \tau}\Big]\Big|_{\tau=0}+$$

$$+\tau_r\cdot\left[\frac{\partial T(P,\tau)}{\partial \tau}\cdot G(M,t,P,\tau)\right]_{\tau=0}\Big\}dV_p-$$

$$-a\cdot\int_0^t\iint_s\Big[T(P,\tau)\cdot\frac{\partial G(M,t,P,\tau)}{\partial n_p}-$$

$$-G(M,t,P,\tau)\cdot\frac{\partial(P,\tau)}{\partial n_p}\Big]_{P\in S}d\tau dV_p+$$

$$=\int_0^t\iiint_D\theta(P,\tau)\cdot G(M,t,P,\tau)d\tau\, dV_p. \qquad (33)$$

Функція Гріна *G*(*M*, *t*, *P*, *τ*) у інтегральному співвідношенні (33) за змінними (*M, t*) задовольняє рівнянню (24) з початковими умовами (25), (26) й граничній умові виду:

$$\left[\gamma_1 \cdot G(M,t,P,\tau) + \gamma_2 \cdot G(M,t,P,\tau)\right]_{M\in S} = 0$$

$$t > \tau. \qquad (34)$$

де $y_1 = 0$, $y_2 = 1$ у випадку першої граничної задачі; $y_1 = 1$, $y_2 = 0$, у випадку другої граничної задачі; $\gamma_1 = 1$, $\gamma_2 = h\cdot(1 + \tau_r\cdot(\partial/\partial t))$ у випадку третьої граничної задачі; за змінними (P, τ) функція $G(M, t, P, \tau)$ задовольняє рівнянню (27) з початковими умовами (28), (29) й граничній умові виду:

$$\left[\gamma_1 \cdot \frac{\partial G(M,t,P,\tau)}{\partial n_p} + \gamma_2 \cdot G(M,t,P,\tau)\right]_{P\in S} = 0$$

$$t < \tau. \qquad (35)$$

де $\gamma_1 = 0, \gamma_2 = 1$ у випадку першої граничної задачі; $\gamma_1 = 1, \gamma_2 = 0$ у випадку другої граничної задачі; $\gamma = 0$, $\gamma_2 = h\cdot(1 - \tau_r\cdot(\partial/\partial t))$ у випадку третьої граничної задачі. Наприклад, у випадку першої граничної задачі (у (10) $\beta_2 = 1$, $\beta_1 = 0$) чи другої граничної задачі (у (10) $\beta_1 = 1$, $\beta_2 = 0$) функція Гріна $G(M,t,P,\tau) = G(M,t-\tau,P)$ має вид:

$$G(M,t-\tau,P) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\psi_n(M)\cdot\psi_n(P)}{\|\psi_n\|^2 \cdot \sqrt{\left(\sqrt{a\tau_r}\cdot\gamma_n\right)^2 - \frac{1}{4}}} \times$$

$$\times \sin\left\{\sqrt{\left(\sqrt{a\tau_r}\cdot\gamma_n\right)^2 - \frac{1}{4}}\cdot(t-\tau)\right\} \times$$

$$\times \exp\left[\frac{-1}{2\tau_r}\cdot(t-\tau)\right], \qquad (36)$$

де $\psi_n(M)$ та γ_n^2 – власні функції та власні значення спектральної задачі (10), (11) відповідно до граничних умов першого та другого роду. Зазначимо, що результат (37) у науковій літературі, мабуть, вперше отриманий Е.М. Карташовим [6].

2. Наочний приклад для нескінченної області.

Як ілюстрації розвинутого підходу розглянемо область $\overline{\Omega} = (x \geq l,\, t \geq 0)$. Цей випадок найбільш часто зустрічається в різноманітних прикладних задачах [3, 5] й вимагає низки уточнень. Для рівняння:

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = a\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \tau_r \frac{\partial^2 T}{\partial t^2},\ (x,t)\in \Omega,\ \text{К/с}, \qquad (37)$$

з початковими умовами

$$T(x,t)\big|_{t=0} = T_0,\ \frac{\partial T(x,t)}{\partial t}\bigg|_{t=0} = 0,\ x \geq l,\ \text{К/с}, \qquad (38)$$

- гранична умова першого роду (температурне нагрівання чи охолодження) записується у вигляді

$$T(x,t)\big|_{x=l} = \varphi_1(t),\ t>0,\ \text{К}; \qquad (39)$$

- гранична умова третього роду (нагрівання середовищем)

$$\frac{1}{\tau_r}\cdot\int_0^t \frac{\partial T(x,\tau)}{\partial x}\bigg|_{x=l}\cdot\exp\left[\frac{-(t-\tau)}{\tau_r}\right]d\tau =$$

$$= -\frac{1}{\lambda}\varphi_2(t),\ t>0,\ \text{К/м}; \qquad (40)$$

- або гранична умова третього роду (нагрівання середовищем):

$$\frac{1}{\tau_r}\cdot\int_0^t \frac{\partial T(x,\tau)}{\partial x}\bigg|_{x=l}\cdot\exp\left[\frac{-(t-\tau)}{\tau_r}\right]d\tau =$$

$$= h\left[T(x,t)\big|_{x=l} - \varphi_3(t)\right],\ t>0,\ \text{К/м}. \qquad (41)$$

В усіх трьох випадках має бути:

$$|T(x,t)| < \infty,\ x \geq l,\ м,\ t \geq 0. \qquad (42)$$

Запишемо точні аналітичні розв'язки наведених граничних задач (37)-(42), використовуючи безрозмірні змінні, як це прийнято у різного роду прикладних задачах:

$$z = \frac{x-l}{\sqrt{a\tau_r}};\ \tau = \frac{t}{\tau_r};\ Bi = h\cdot\sqrt{a\tau_r};$$

$$W(z,\tau) = \frac{T(x,t) - T_0}{T_c - T_o};$$

$$\begin{cases} \varphi_i(\tau) = \dfrac{\varphi_i(t) - T_o}{T_c - T_o};\ \varphi_2(\tau) = \dfrac{\sqrt{a\tau_r}\,\varphi_2(t)}{\lambda(T_c - T_o)}, \\ i = (1;3); \end{cases} \qquad (43)$$

де $T_c > T_o$, К – обрана одиниця масштабу; T_c – температура навколишнього середовища, К. З використанням інтегрального співвідношення

(33) маємо

$$W(z,\tau)=\int_0^{\tau}\varphi_i(\tau')\times$$

$$\times\left[\beta_1\left(1+\frac{\partial}{\partial\tau'}\right)G(z,\tau-\tau',z')+\right.$$

$$\left.+\beta_2\frac{\partial G(z,\tau-\tau',z')}{\partial z'}\right]_{z'=0}d\tau', \qquad (43)$$

де $\beta_1 = 0$, $\beta_2 = 1$ для першої граничної задачі $i = 1$; $\beta_1 = 1$, $\beta_2 = 0$ для другої граничної задачі $i = 2$; $\beta_1 = Bi^*$ (число Біо), $\beta_2 = 0$ для третьої граничної задачі $i = 3$. У залежностях (41) і (42) досліджуємо окремо випадок, коли $\varphi_i(t) = \varphi(0) = \text{const}$ (i - 1, 2, 3).

Граничну умову (16) для функції $W(z,\tau)$ можна записати у вигляді:

$$\int_0^{\tau}\frac{\partial W(z,\tau')}{\partial z}=\exp[-(\tau-\tau)]d\tau=$$

$$=Bi\left[W(z,\tau)|_{z=0}-\varphi_0\cdot\eta(\tau)\right],\ \tau>0.$$

Переходимо до диференціальної форми (21). Маємо

$$\left.\frac{\partial W(z,\tau)}{\partial z}\right|_{z=0}=Bi\left(1+\frac{\partial}{\partial\tau}\right)\times$$

$$\times\left[W(z,\tau)|_{z=0}--\varphi_0\cdot\eta(\tau)\right],\ \tau>0.$$

Після перетворень остаточно маємо

$$\left.\frac{\partial W(z,\tau)}{\partial z}\right|_{z=0}=Bi\left(1+\frac{\partial}{\partial\tau}\right)W(z,\tau)|_{z=0}-$$

$$-Bi[1+\delta(\tau)]\varphi_0,\quad \tau>0. \qquad (45)$$

Тут $\eta(\tau)$ – функція Хевісайда

$$\eta(\tau)=\begin{cases}1,\ \tau>0,\\ 0,\ \tau<0;\end{cases}\ \frac{d}{d\tau}[\eta(\tau)]=\delta(\tau).$$

За допомогою аналогічних міркувань знаходимо для граничних умов другого роду (теплове нагрівання):

$$\left.\frac{\partial W(z,\tau)}{\partial z}\right|_{z=0}=-[1+\delta(\tau)]\varphi_0,\quad \tau>0. \qquad (46)$$

Зрозуміло, до співвідношень (45) і (46) приводить також й операційний метод. Граничні умови першого роду зберігають свою форму для даного випадку, а саме

$$\left.\frac{\partial W(z,\tau)}{\partial z}\right|_{z=0}=\varphi_0' \qquad \tau>0. \qquad (47)$$

Для граничних умов (45)-(47) інтегральна форма розв'язку задачі, яка випливає з (44), має вид:

$$\frac{\partial W(z,\tau)}{\varphi_0}=\beta_1 G(z,\tau,z')|_{z'=0}+$$

$$+\int_0^{\tau}\left[\beta_2 G(z,\tau-\tau',z')+\right.$$

$$\left.+\beta_3\frac{\partial G(z,\tau-\tau',z')}{\partial z'}\right]_{z'=0}d\tau' \qquad (48)$$

де $\beta_1 = 0$, $\beta_2 = 0$, $\beta_3 = 1$ - для граничних умов (47); $\beta_1 = 1$, $\beta_2 = 1$, $\beta_3 = 0$ - для граничних умов (46); $\beta_1 = \beta_2 = Bi$, $\beta_3 = 0$ - для граничних умов (45).

Функція Гріна $G(z,\tau-\tau',z')$, яка входить у (44) та (48) задовольняє рівнянню

$$\frac{\partial G}{\partial\tau}=a\cdot\frac{\partial^2 G}{\partial z^2}-\frac{\partial^2 G}{\partial\tau^2},\ z>0,\ \tau>\tau'. \qquad (49)$$

Початкові умови:

$$G|_{\tau=\tau'}=0,\ \left.\frac{\partial G}{\partial\tau}\right|_{\tau=\tau'}=\delta(z-z'),\ (z,z')>0, \qquad (50)$$

Граничні умови приймаються одні з таких:

- першого роду -

$$G(z,\tau-\tau',z')|_{z=0}=0,\ \tau>\tau'. \qquad (51)$$

- другого роду -

$$\left.\frac{\partial G(z,\tau-\tau',z')}{\partial z}\right|_{z=0}=0,\ \tau>\tau'. \qquad (52)$$

- третього роду -

$$\left.\frac{\partial G(z,\tau-\tau',z')}{\partial z}\right|_{z=0}=$$

$$Bi\left(1+\frac{\partial}{\partial\tau}\right)G(z,\tau-\tau',z'),\ \tau>\tau'. \qquad (53)$$

При цьому

$$\left|G\left(z,\tau-\tau',z'\right)\right|<\infty,\ z\geq 0,\ \tau\geq\tau'. \qquad (54)$$

У просторі зображень за Лапласом:

$$\overline{G}\left(z,p,z'\right)=\int_0^\infty \exp\left(-p,t'\right)\cdot G\left(z,t',z'\right)dt',$$

$$t'=\tau-\tau'.$$

Функція Гріна як розв'язок задач (49)-(54) має вигляд:

$$\overline{G}\left(z,p,z'\right)=\frac{1}{2\sqrt{\overline{b}(p)}}\times$$

$$\times\left\{\alpha_1\cdot\exp\left[-\left(z-z'\right)\cdot\sqrt{\overline{b}(p)}\right]+\right.$$

$$\left.+\alpha_2\cdot\exp\left[-\left(z+z'\right)\cdot\sqrt{\overline{b}(p)}\right]\right\}, \qquad (55)$$

Де залежно від прийнятих граничних умов:

- $\overline{b}(p)=p^2+p;\ \alpha_1=1,\ \alpha_2=-1$ для умови (51);
- $\alpha_1=1,\ \alpha_2=1$ для умови (52);
- $\alpha_1=1,\ \alpha_2=\dfrac{\sqrt{p}-Bi^{\sqrt{p+1}}}{\sqrt{p}+Bi^{\sqrt{p+1}}}$ – для умови (53).

Тепер можна виписати аналітичні розв'язки усіх граничних задач (37)-(42) у вигляді інтегрального співвідношення (44). Для зменшення громіздкості в запису оригіналів розв'язків достатньо розглянути випадки (45)-(47). Адже загальний випадок $\varphi_i(\tau)\neq\text{const}$ виписується аналогічно, якщо використати наступний прийом. Маючи зображення (55) для функцій Гріна в усіх трьох перейдемо у (48) у простір зображень. Це дає для всіх трьох розв'язків

$$\frac{\overline{W}(z,\tau)}{\varphi_0}=\overline{f}(p)\cdot\exp\left(-z\sqrt{p^2+p}\right),. \qquad (56)$$

де

$$\overline{f}(p)=$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{p} & \text{– гранична умова (47)}\\ \dfrac{\sqrt{1+p}}{p^{3/2}} & \text{– гранична умова (46)}\\ \dfrac{Bi\sqrt{p+1}}{p\cdot\left\{Bi\sqrt{p+1}+\sqrt{p}\right\}} & \text{– гранична умова (45)}\end{cases}$$

У просторі оригіналів знаходимо:

$$W\frac{(z,\tau)}{\varphi_0}=\left\{f(\tau-z)\cdot\exp\left(-\frac{z}{2}\right)+\right.$$

$$+\frac{z}{2}\int_z^\tau f\left(\tau-\tau'\right)\cdot\exp\left(-\frac{\tau'}{2}\right)\times$$

$$\left.\times\frac{I_1\left[\frac{1}{2}\sqrt{\left(\tau'\right)^2-z^2}\right]}{\sqrt{\left(\tau'\right)^2-z^2}}d\tau'\right\}\times$$

$$\times\eta(\tau-z), \qquad (54)$$

де $I_1(q)$ – функція Бесселя першого роду від дійсного аргументу q; f – функція

$$f(\tau)=\begin{cases}1 & \text{у випадку (47),}\\ \displaystyle\int_0^\tau\left[\frac{\exp(-\tau')}{\sqrt{\pi\tau'}}+\Phi\left(\sqrt{\tau'}\right)\right]\times\\ \times\dfrac{d\tau'}{\sqrt{\pi\left(\tau-\tau'\right)}} & \text{у випадку (46),}\\ 1-\gamma_3\cdot\exp\left(-\gamma_2\tau\right)-\\ \displaystyle-\gamma_1\int_0^\tau\left[\frac{1}{\sqrt{\pi\tau'}}+\right.\\ \left.+\sqrt{\gamma_3}\exp\left(\gamma_3\tau'\right)\Phi\left(\sqrt{\gamma_3\tau'}\right)\right]\times\\ \times\dfrac{\exp(-\tau')}{\sqrt{\pi\left(\tau-\tau'\right)}}d\tau' & \text{у випадку (45);}\end{cases}$$

γ1….γ3 – параметри:

$$\gamma_1=\frac{(1-\gamma_3)}{Bi},\ \gamma_2=\left(1-\gamma_3\right),\ \gamma_3=\left\{1-(Bi)^2\right\}^{-1}.$$

Особливістю аналітичних розв'язків (57), (58), зазначених у ранній роботі [3], є хвильовий характер процесу теплопровідності, котрий виражається степеневою функцією $\eta(\tau-z)$. У будь-який момент часу $\tau>0$ існує незбурена область $z>\tau$ й область теплового сліду $z<\tau$. Іншими словами, у точках області $z>0$, які знаходяться на відстані від границі $z=0$ більше, ніж на τ, зміни температури не відбувається. На поверхні фронту теплової хвилі, що розповсюджується, має місце рівність $z=\tau$, однак на фронті температура здійснює стрибок. Розрахуємо величину цього стрибка, маючи операційний розв'язок задачі (57). Для цього використовуємо теорему запізнення [7]:

$$\exp\left(p\cdot\tau_0\right)\cdot\bar{\varphi}\left(p\right)\leftarrow\begin{cases}0, & \tau<\tau_0\\ \varphi\left(\tau-\tau_0\right), & \tau>\tau_0,\end{cases}$$

звідки видно, що в точці τ_c відбувається стрибок функції $\varphi(\tau)$. Величина цього стрибка розраховується за формулою:

$$\left|\Delta\right|=\lim_{\tau\to\tau_0+0}\left\{\varphi\left(\tau-\tau_0\right)\right\}=\lim_{\tau\to\tau_0}\left\{\varphi\left(\tau\right)\right\}=\lim_{p\to\infty}\left\{p\cdot\bar{\varphi}\left(p\right)\right\}.$$

Для визначення величини $|\Delta|$ в операційному розв'язку (57) необхідно виділити складову $\exp(-zp)$. При цьому для $|p|\gg 1$ справедливе співвідношення

$$\exp\left(-z\sqrt{p^2+p}\right)=\exp\left[-zp\left(1+\frac{1}{p}\right)^{\frac{1}{2}}\right]\approx$$

$$\approx\exp\left(-z/2\right)\cdot\exp\left(-zp\right).$$

Звідси знаходимо для всіх трьох випадків:

- у випадку (46)

$$\left|\Delta\right|=p\cdot\left[\left(\frac{Bi\sqrt{p+1}}{p\cdot\left\{Bi^{\sqrt{p+1}}+\sqrt{p}\right\}}\right)\cdot\exp\left(-\frac{z}{2}\right)\right]=$$

$$=Bi\exp\left(-\frac{z}{2}\right)$$

- у випадку (47)

$$\left|\Delta\right|=\lim_{p\to\infty}p\cdot\left[\frac{\sqrt{1+p}}{p^{\frac{3}{2}}}\cdot\exp\left(\frac{-z}{2}\right)\right]=\exp\left(-\frac{z}{2}\right)$$

- у випадку (48)

$$\left|\Delta\right|=\lim_{p\to\infty}p\cdot\left[\frac{1}{p}\cdot\exp\left(\frac{-z}{2}\right)\right]=\exp\left(-\frac{z}{2}\right)$$

- у загальному випадку

$$\left|\Delta\right|=\begin{cases}Bi\exp\left(-\dfrac{z}{2}\right) & \text{у випадку (46)}\\ \exp\left(-\dfrac{z}{2}\right) & \text{у випадках (47) і (48)}\end{cases}$$

Висновки. Отримані аналітичні розв'язки гіперболічних моделей нестаціонарної теплопровідності показують, що в середовищі розповсюджується теплова ударна хвиля зі швидкістю v_T. При цьому величина розриву температури швидко спадає з плином часу. Запропоновані інтегральні співвідношення дозволяють отримати аналітичні розв'язки граничних задач нестаціонарної теплопровідності для рівнянь гіперболічного типу. Сформульовані граничні умови для гіперболічних моделей теплопровідності в інтегральній та диференціальній формах. Розглянуті граничні задачі для напівнескінченної області, отримані аналітичні розв'язки, проведений їх аналіз й розраховані стрибки температури на фронті теплової хвилі. Результати роботи у подальшому можуть бути використані для вдосконалення й уточнення існуючих інженерних методів розрахунку параметрів середовищ в умовах нестаціонарної теплопровідності останніх. гральній та диференціальній формах. Розглянуті граничні задачі для напівнескінченної області, отримані аналітичні розв'язки, проведений їх аналіз й розраховані стрибки температури на фронті теплової хвилі. Результати роботи у подальшому можуть бути використані для вдосконалення й уточнення існуючих інженерних методів розрахунку параметрів середовищ в умовах нестаціонарної теплопровідності останніх.

Література

1. Москвітіна А.С. Аналітична модель системи теплопостачання з геліоколекторами та акумулятором теплоти / А.С. Москвітіна // Молодий вчений. – 2020. – №3. – С. 193-198.

2. Карташов Э.М. Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел / Э.М. Карташов – Москва: Высшая школа, 2001. – 540 с.

3. Баумейстер К. Гиперболическое уравнение теплопроводности. Решение задачи о полубесконечном теле / К. Баумейстер, Т. Хамилл // Теплопередача. – 1969. – № 4. – С. 112 – 119.

4. Роуч П. Вычислительная гидродинамика / П. Роуч. – Москва: Мир, 1980. – 618 с.

5. Лыков А.В. Теория теплопроводности / А.В. Лыков. – Москва: Высшая школа, 1967. – 600 с.

6. Подстригач Я. С., Коляно Ю. М. Обобщенная термомеханика / Я. С. Подстригач, Ю. М. Коляно. – Киев: Наукова думка, 1976. – 312 с.

7. Карташов Э. М. Новые интегральные соотношения для аналитических решений гиперболических моделей переноса / Э. М. Карташов // ДАН. – 2002. – Т.384. – №1. – С.17-21.

8. Карташов Э. М., Кудинов В. А. Аналитическая теория теплопроводности и прикладной термоупругости / Э. М. Карташов, В. А. Кудинов. – Москва: Книжный дом "Либроком", 2018. – 656с.

References

1. Moskvitina A. “Analitychna model systemy teplopostachannia z heliokolektoramy ta akumulyatorom teploty”. *Molodyi vchenyi*. 2020. №3. p. 193-198.

2. Kartashov E. M. *Analiticheskie metody v teorii teploprovodnosti tverdykh tel*. Vysshaia shkola, 2001.

3. Baumeister K., Khamill T. “Giperbolicheskoe uravnenie teploprovodnosti. Reshenie zadachi o polubeskonechnom tele”. *Teploperedacha*. 1969. №4. P.112-119.

4. Rouch P. *Vychislitelnaia gidrodinamika*. Mir, 1980.

5. Lykov A.V. *Teoriia teploprovodnosti*. Vysshaia shkola, 1967.

6. Podstrigach Ya. S., Koliano Yu. M. *Obobshchennaia termomekhanika*. Naukova dumka, 1976.

7. Kartashov E.M. “Novye integralnye sootnosheniia dlia analiticheskikh reshenii giperbolicheskikh modelei perenosa”. *DAN*. 2002. T. 384. No 1. P.17-21.

8 Kartashov E.M., Kudinov V.A. *Analiticheskaia teoriia teploprovodnosti i prikladnoi termouprugosti*. Knizhnyi dom "Librokom", 2018.

УДК 536.2.001.24

Использование метода интегральных соотношений для аналитических решений гиперболических моделей теплопроводности

Ю.В. Човнюк[1], В.Т. Кравчук[2], А.С. Москвитина[3], И. А. Пефтева[4]

[1]к.т.н., доц. Национальный университет биоресурсов и природопользования Украины, г. Киев, Украина, ychovnyuk@ukr.net, ORCID: 0000-0002-0608-0203

[2]к.т.н., доц. Киевский национальный университет строительства и архитектуры, г. Киев, Украина, vtk1@ukr.net

[3]асист. Киевский национальный университет строительства и архитектуры, г. Киев, Украина, moskvitina.as@knuba.edu.ua, ORCID: 0000-0003-3352-0646

[4]асист. Киевский национальный университет строительства и архитектуры, г. Киев, Украина, piefteva.io@knuba.edu.ua, ORCID: 0000-0002-8858-9010

Аннотация. Изучение процессов нестационарной теплопроводности, расчет параметров сред в условиях нестационарной теплопроводности последних - важное направление, который используется в прикладных задачах тепломассообмена. При решении математической модели при различных граничных условиях существует проблема достоверности численных расчетов, поэтому есть необходимость в решении математической модели аналитическим методом. Например, математическая модель процессов тепломассообмена в аккумуляторе теплоты при его зарядке и разрядке решается аналитически методом функции Грина, аналогично решается математическая модель процессов нагрева теплоносителя в солнечных коллекторах. Конкретное определение функции Грина соответствует конкретной задачи математической физики. Предложено развитие метода функций Грина для решения граничных задач нестационарной теплопроводности обобщенного типа на основе закона Максвелла-Каттанео-Лыкова. Сформулированы граничные условия в соответствии с указанным законом. При рассмотрении конкретных задач в ряде случаев интегральную форму записи граничных условий второго или третьего рода целесообразно перевести в дифференциальную, эквивалентную интегральной. Предложенные интегральные соотношения для аналитических решений граничных задач нестационарной теплопроводности для уравнений гиперболического типа. Сформулированы граничные условия для гиперболических моделей теплопроводности в интегральной и дифференциальной формах. Рассмотрены граничные задачи для полубесконечной области, получены аналитические решения, проведенный их анализ и рассчитаны скачки температуры на фронте тепловой волны. Рассмотрены иллюстративные задачи для полубесконечной области и описаны область теплового следа и невозмущенная область.

Ключевые слова: математическая модель теплопроводности, нестационарная теплопроводность, интегральные соотношения, аналитические решения математической модели теплопроводности, гиперболическая модель, теплопроводность, закон Максвелла-Каттанео-Лыкова.

UDC 536.2.001.24

Use of the Method of Integral Relations for the Analytic Solutions of Hyperbolic Models of Thermal Conductivity

Y.Chovniuk[1], V. Kravchuk[2], A. Moskvitina[3], I. Pefteva[4]
[1]PhD, associate professor. National University of Life and Environmental Sciences of Ukraine, Kyiv, Ukraine, ychovnyuk@ukr.net, ORCID: 0000-0002-0608-0203
[2] PhD, professor. Kyiv National University of Construction and Architecture. Kyiv, Ukraine, vtk1@ukr.net
[3]Assistant. Kyiv National University of Construction and Architecture, Kyiv, Ukraine, moskvitina.as@knuba.edu.ua, ORCID: 0000-0003-3352-0646
[4]Assistant. Kyiv National University of Construction and Architecture, Kyiv, Ukraine, piefteva.io@knuba.edu.ua, ORCID: 0000-0002-8858-9010

Abstract. The study of the processes of unsteady heat conduction, the calculation of the parameters of media under conditions of unsteady heat conduction of the latter is an important direction, which is used in applied problems of heat and mass transfer. When solving a mathematical model under various boundary conditions, there is a problem of the reliability of numerical calculations, therefore there is a need to solve the mathematical model by an analytical method. For example, a mathematical model of heat and mass transfer processes in a heat accumulator during its charging and discharging is solved analytically by the Green's function method, similarly, a mathematical model of heat carrier heating processes in solar collectors is solved. The specific definition of the Green's function corresponds to a specific problem in mathematical physics. Green's function contains complete information about the studied equation, and with its help one can construct a solution for any inhomogeneity. The development of the method of Green's functions for solving boundary value problems of unsteady heat conduction of generalized type on the basis of the Maxwell-Cattaneo-Lykov law is proposed. On the basis of the introduced Green's function of the differential equation, the Green's function of the boundary value problem is determined. Green's function of a boundary value problem is considered as an element of the set of Green's functions of an equation or a system of equations. Boundary conditions are formulated in accordance with the specified law. When considering specific problems, in a number of cases, it is expedient to transfer the integral form of writing boundary conditions of the second or third kind into a differential form equivalent to the integral one. The proposed integral relations for analytical solutions of boundary value problems of unsteady heat conduction for equations of hyperbolic type. Necessary and sufficient conditions for the existence and uniqueness of the Green's function of the boundary value problem are given and its analytical representation is given in terms of the fundamental system of solutions and boundary conditions. Boundary conditions are formulated for hyperbolic models of heat conduction in integral and differential forms. Boundary value problems for a semi-infinite region are considered, analytical solutions are obtained, their analysis is carried out, and temperature jumps at the heat wave front are calculated. Illustrative problems for a semi-infinite region are considered, and the heat wake region and the unperturbed region are described.

Keywords: mathematical model of thermal conductivity, non-stationary thermal conductivity, integral relations, analytical solutions of the mathematical model of thermal conductivity, hyperbolic model, thermal conductivity, Maxwell-Cattane-Lykov's law.

Надійшла до редакції / Received 23.04.2021