УДК 536.24: 621.12:697:356

Визначення профілю швидкості та втрат тиску при ламінарному русі в каналах двокутного перерізу.

В.Г. Дзюбенко
ст. викладач. Київський національний університет будівництва і архітектури.

Розглянуто ламінарний рух рідини в каналах двокутного перерізу, утвореного двома рівними дугами кіл. Показано, що аналогія між профілем швидкості в таких каналах та круглих трубопроводах не дає достатньої точності для інженерного розрахунку. Виконано наближений розв'язок рівняння Нав'є-Стокса. Профіль швидкості описано апроксимаційним багаточленом. Визначено коефіцієнт поля швидкості та коефіцієнт опору тертя Дарсі. Показано можливість використання формули Пуазейля для випадку двокутного каналу

Ключові слова: двокутний канал, ламінарний рух, теплоутилізатор, підземні води, рівняння Нав'є-Стокса.

Вступ. Існують технічні задачі, пов'язані з потоками рідини в каналі, утвореному двома рівними дугами кіл, що перетинаються (рис. 1).

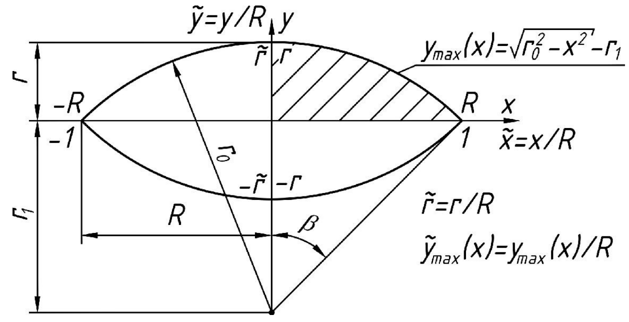


Рис 1. Двокутний переріз

Довжина довгої півосі позначена *R*, короткої півосі – *r*, відношення півосей – $\tilde{r} = r / R$. У сферичній геометрії така фігура називається двокутником. Двокутний канал утворюється при русі теплоносія між двома піддатливими листами, звареними прямими швами, зафіксованими на відстані *R*. За цим принципом працюють полімерні теплообмінники [1], розроблені на кафедрі теплогазопостачання і вентиляції Київського національного університету будівництва і архітектури. Також розповсюджені двокутні тріщини в гірських породах, якими переміщуються підземні води [2]. Таким чином, аналіз особливостей руху рідини у двокутних каналах є актуальною науковою задачею.

Аналогія з круглими трубопроводами. Одним з підходів до вирішення питань гідродинаміки двокутних каналів є використання аналогії між двокутними каналами та круглими трубопроводами [1]. Така ідея обумовлена ідентичністю форми меж обох перерізів за винятком лише двох точок – вершин. Це дозволяє безпосередньо застосувати відомий закон Ньютона, за яким дотичне напруження τ в потоку рідини з динамічною в'язкістю μ та локальною швидкістю w на відстані від центру дуги стінки каналу r_c становить $\tau = \mu\, dw / dr_c$.

До рівняння долучається лінійний закон зростання дотичних напружень від центра дуги до осі, аналогічний круглим трубопроводам [3,4]. Таким чином, отримується "параболічний" профіль швидкості з ребром на великій півосі, що фізично неможливо. Коефіцієнт опору тертя Дарсі визначається за громіздкою формулою. При круглому перерізі ($\widetilde{r} = 1$) профіль вироджується у параболоїд обертання, а коефіцієнт опору тертя Дарсі визначається за відомою формулою [3,4,5]:

$$\lambda = 64 / Re, \qquad (1)$$

де Re – число Рейнольдса за середньою швидкістю потоку $\overline{w}$, діаметром перерізу d_e та кінематичною в'язкістю рідини ν:

$$Re = \overline{w} d_e / \nu . \qquad (2)$$

Більшість видань з гідравліки або аеродинаміки [3,4 та ін] не містять даних щодо можливості або неможливості застосування такого підходу до перерізів, відмінних від круглих, навіть якщо вони утворені дугами кіл. Натомість для потоку рідини густиною ρ в трубопроводі завдовжки ℓ з перерізом довільної форми площею A та змоченим периметром χ використовують число Рейнольдса (2) та формулу Дарсі

$$\Delta p = \lambda \left(\ell / d_e\right) \rho\, \overline{w}^{\,2} / 2 \qquad (3)$$

з еквівалентним діаметром $d_e = 4A / \chi$. Однак, отримана в роботі [1] залежність передбачає діапазон зміни коефіцієнта опору тертя Дарсі в межах (53,3...64)/Re всупереч залежності (1). Така розбіжність сукупно з ламаним профілем швидкості вимагає додаткового аналізу отриманих в роботі [1] результатів.

Апроксимація профілю швидкості. У загальному випадку характеристики потоку мають визначатися з рівняння Нав'є-Стокса [5,6], яке після перетворень з урахуванням формули Дарсі (3) та в системі відносних координат $\widetilde{x}, \widetilde{y}$ (рис. 1) набуває вигляду:

$$\frac{1}{\nu}\frac{\lambda}{d_e}\frac{\overline{w}^2}{2}\frac{k_w R^2}{\overline{w}} = \frac{\overline{w} d_e}{\nu}\frac{\lambda}{2}\frac{k_w}{\widetilde{d}_e^2} = Re\frac{\lambda}{2}\frac{k_w}{\widetilde{d}_e^2} = -\frac{\partial^2 \widetilde{w}}{d\widetilde{x}^2} - \frac{\partial^2 \widetilde{w}}{d\widetilde{y}^2} = -\mathbf{\Delta}\widetilde{w} = const , \qquad (4)$$

де $\widetilde{w} = w / w_m$ – відносна швидкість, віднесена до максимальної w_m, $\mathbf{\Delta} = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ – оператор Лапласа або лапласиан; $k_w = \overline{w} / w_m$ – коефіцієнт поля швидкості. Розглянемо праву верхню чверть перерізу. Граничні умови:

$$\begin{cases} \tilde{w} = 0 & \text{при} \ \ |\tilde{x}| \le 1, \ \tilde{y} = \tilde{y}_{max}(x); \\ \tilde{w} = 1 & \text{при} \ \ \tilde{x} = \tilde{y} = 0; \\ d\tilde{w}/d\tilde{x} = 0 & \text{при} \ \ \tilde{x} = 0; \\ d\tilde{w}/d\tilde{y} = 0 & \text{при} \ \ \tilde{y} = 0. \end{cases} \tag{5}$$

Останні дві граничні умови (5) означають гладкість симетричного профілю швидкості.

Для наближеного розв’язання диференційних рівнянь використаємо проекційний метод з оптимізацією невизначених коефіцієнтів. Створюємо рівняння апроксимації, що відповідає умовам (5). Для цього вводимо нову систему координат $X = \tilde{x}$, $Y = \tilde{y} / \tilde{y}_{max}(x)$. На межах перерізу значення Y дорівнює одиниці. Умови (5) набувають вигляду:

$$\begin{cases} \tilde{w} = 0 & \text{при} \ \ Y = 1; \\ \tilde{w} = 1 & \text{при} \ \ X = Y = 0; \\ d\tilde{w}/d\tilde{x} = 0 & \text{при} \ \ X = 0; \\ d\tilde{w}/d\tilde{y} = 0 & \text{при} \ \ Y = 0. \end{cases} \tag{6}$$

В умовах (6) похідні беруться за вихідною системою координат. Апроксимуємо профіль швидкості багаточленом степеню n у новій системі координат. Щоб уникнути трудомісткого взяття похідних та підстановки граничних умов використано систему символьної алгебри Maxima з оболонкою wxMaxima.

У перерізі вводиться рівномірна сітка в системі координат (X та Y). На цій сітці підраховуються значення лапласиану при прийнятих значеннях коефіцієнтів багаточлена. Вибирається найменше і найбільше значення $\mathbf{\Delta}\tilde{w}_{min}$ та $\mathbf{\Delta}\tilde{w}_{max}$. Визначається середнє значення лапласиану $\overline{\mathbf{\Delta} w}$, що забезпечує найменше значення максимального відносного відхилення лапласиану в перерізі, тобто

$$\max \left| \left(\overline{\mathbf{\Delta} w} - \mathbf{\Delta}\tilde{w} \right) / \mathbf{\Delta}\tilde{w} \right| \to min \ , \tag{7}$$

$$\overline{\mathbf{\Delta} w} = 2\mathbf{\Delta}\tilde{w}_{max}\,\mathbf{\Delta}\tilde{w}_{min} \,/ \left(\tilde{w}_{max} + \tilde{w}_{min} \right). \tag{8}$$

Максимальне відносне відхилення лапласиану від середнього значення у відсотках є цільовою функцією оптимізації апроксимаційних коефіцієнтів:

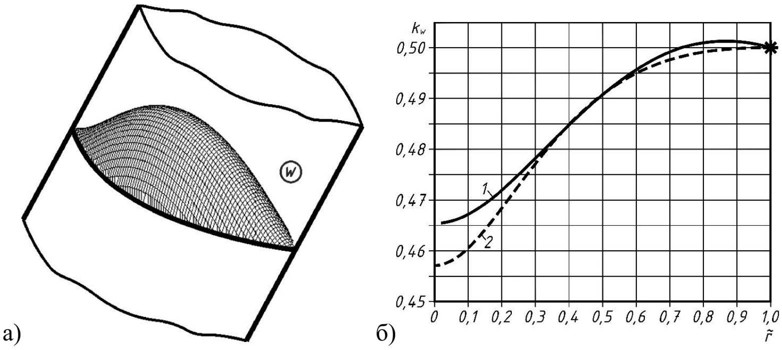
$$\varepsilon_{\Delta} = 100 \left| \left(\overline{\mathbf{\Delta} w} - \mathbf{\Delta}\tilde{w}_{min} \right) / \mathbf{\Delta}\tilde{w}_{min} \right| = $$
$$= 100 \left| \left(\mathbf{\Delta}\tilde{w}_{max} - \overline{\mathbf{\Delta} w} \right) / \mathbf{\Delta}\tilde{w}_{max} \right| \to min \ . \tag{9}$$

Встановлюємо допустиму межу цього відхилення – $\varepsilon_{\Delta} < 5$ %. Цільова функція (9) у загальному випадку є мультимодальною (має кілька локальних мінімумів) та задає багатовимірну поверхню з багатьма ярами. Тому існує можливість кількох розв'язків задачі. У даному випадку прийнятним є лише такий розв'язок, що забезпечує неперервність коефіцієнтів апроксимації за параметром $\widetilde{r}$ і містить точний розв'язок для круглого перерізу при $\widetilde{r}=1$ – параболоїд обертання.

Отримане рівняння профілю швидкості (рис. 2 а):

$$\widetilde{w}=X^3\left(Y^3-1\right)\left(a_1X^2+a_2\right)+\left(Y^2-1\right)\left(a_3Y^2+X^2\left(a_4X^3+a_5\right)-1\right). \qquad (10)$$

Коефіцієнти апроксимації a_i мають бути підраховані мінімум до шести знаків після коми за формулою:



а) б)

Рис. 2. Результати апроксимації:
а – профіль швидкості, б – коефіцієнт поля швидкості за результатами:
1 – інтегрування отриманого профілю швидкості; 2 – наближеного розв'язання рівняння Нав'є-Стокса кінцево-різницевим методом (розбіжність до 1,84 %); * – за даними [3-5]

$$a_i=\sum_j a_{i,j}\widetilde{r}^{\,j}, \quad i=1,2,3,4,5\,. \qquad (11)$$

Значення коефіцієнтів $a_{i,j}$ наведені в табл. Інтегрування профілю швидкості дає коефіцієнт поля швидкості (рис. 2 б), що відрізняється від результатів кінцево-різницевого розв'язання при $\overline{r}\geq 0{,}008$ не більше ніж на 1,84 %. Відхилення середнього значення Лапласиану не перевищує 2,41 %. Отриманий за рівнянням (4) коефіцієнт Дарсі описується формулою (1) з похибкою не більше 2,35 % при $\widetilde{r}\geq 0{,}009$ та 3,84 % при $\widetilde{r}\geq 0{,}008$. Таким чином, апроксимація перерізу шляхом оптимізації невизначених коефіцієнтів дає достовірні результати, а формула (1) справедлива для випадку двокутного перерізу.

Висновки. Отримано апроксимацію профілю швидкості у двокутному каналі, яка дозволяє розрахувати коефіцієнт поля швидкості та коефіцієнт Дарсі з незначним відхиленням порівняно з кінцево-різницевими методами. Використання параболічного закону швидкості за аналогією до круглого перерізу не дає достатньої точності для розрахунку втрат тиску у двокутному каналі.

Таблиця 1

Значення коефіцієнтів $a_{i,j}$ за рівнянням (2.11)

j	Значення коефіцієнта $a_{i,j}$ при i				
	1	2	3	4	5
12	–	– 110,42078		–	–
11	–	727,164967		–	–
10	– 3,30854	– 2146,680027	41,759975	23,53024	–
9	–	3636,560875	– 173,000764	–	–
8	27,22283	– 3799,285088	287,056075	– 244,86341	–
7	– 50,792248	2478,794067	– 241,91155	553,21048	– 5,71295
6	32,187438	– 982,378237	108,002629	– 548,384198	16,84077
5	–	216,140594	– 24,06799	286,12942	– 18,96678
4	– 5,311767	– 20,98908	2,161669	– 80,05	9,86369
3	–	1,094464	–	8,14322	–
2	–	–	–	3,05473	– 2,77542
0	0,002287	– 0,001755	0,000044	– 0,770482	1,75069

Література

1. *Кезля Е.А.* Воздухонагреватель из полимерной плёнки для систем воздушного отопления теплиц. – Автореферат диссертации на соискание учёной степени кандидата технических наук. – К., 1988.

2. *Алишаев М.Г.* Точные решения ламинарного движения вязкой жидкости по прямолинейным трубам некруглых сечений. // Дагестанские электронные математические известия: Научно-образовательный журнал: Электронное периодическое издание. Т. 1 2013 С. 88-102 [http://mathreports.ru/static?id=130]

3. *Бабенина Т.П.* Гидравлика. Техническая гидродинамика: Конспект лекций.- Екатеринбург: изд-во УГГУ, 2006.-180 с.

4. *Триандафилов А.Ф.* Гидравлика и гидравлические машины : учебное пособие / А.Ф. Триандафилов, С.Г. Ефимова ; Сыкт. лесн. ин-т. – Сыктывкар : СЛИ, 2012. – 212 с.

5. Механика жидкости и газа, гидро- и пневмопривод: Курс лекций / Сост. В.С. Сальников; Яросл. Гос. техн. ун-т. – Ярославль, 2002.-200 с.

6. *Хмельник С.И.* Уравнение Навье-Стокса. Существование и метод поиска глобального решения. - Израиль.: изд-во МiС, 2010. – 108 с.

Определение профиля скорости и потери давления приламинарном потоке в каналах двуугольного сечения.

В.Г. Дзюбенко

Рассмотрено ламинарное движение жидкости в каналах двуугольного сечения, образованного двумя равными дугами окружностей. Показано, что аналогия между профилем скорости в таких каналах и круглых трубопроводах не даёт достаточной точности для инженерного расчёта. Выполнено приближённое решение уравнения Навье-

Стокса. Профиль скорости описан аппроксимационным многочленом. Определён коэффициент поля скорости и коэффициент сопротивления трения Дарси. Показана возможность использования закона Пуазейля для случая двуугольного канала

Ключевые слова: двуугольный канал, ламинарное движение, теплоутилизатор, подземные воды, уравнение Навье-Стокса.

Determination of the velocity profile and pressure drop of laminar flow in diagonal ducts

V. Dzyubenko

We study a laminar fluid flow in a diagonal duct which section is formed by two equal circular arcs. It is shown that the analogy between the velocity profile in such ducts and round pipes does not give sufficient accuracy for engineering calculations. We propose an approximate solution of the Navier-Stokes equations. The velocity profile is described by approximation polynomial. We found the velocity field coefficient and the Darcy coefficient. We prove the possibility of using Poiseuille's law for the case of diagonal channel

Keywords: diagonal channel, laminar flow, heat exchanger, groundwater, the Navier-Stokes equations.

Надійшла до редакції 27.04.2015 р.