УДК 539.3

Функціональний аналіз теплопровідності та в'язкості квазітвердих капілярно-пористих тіл за змінних параметрів повітряного середовища при музейному зберіганні

В. Б. Довгалюк[1], Ю. В. Човнюк[2], М. О. Шишина[3], А. С. Москвітіна[4]

[1]д.т.н., проф. Київський національний університет будівництва і архітектури, м. Київ, Україна, 2280170@ukr.net, ORCID: 0000-0002-4836-5354

[2]к.т.н., доц. Національний університет біоресурсів і природокористування України, м. Київ, Україна, ychovnyuk@ukr.net, ORCID: 0000-0002-0608-0203

[3]асист. Київський національний університет будівництва і архітектури, м. Київ, Україна, shyshyna.mo@knuba.edu.ua, ORCID: 0000-0001-9384-7662

[4]асист. Київський національний університет будівництва і архітектури, м. Київ, Україна, moskvitina.as@knuba.edu.ua, ORCID: 0000-0003-3352-0646

Анотація. Наведено фундаментальний аналіз теплопровідності та в'язкості квазітвердих капілярно-пористих тіл (КПТ), які є матеріалами предметів музейного зберігання. Серед іншого це – фарби на картинах, фарбовані тканини тощо. Зміна параметрів повітряного середовища спричиняє виникнення градієнту температури у КПТ. Отримана система диференціальних рівнянь у частинних похідних за часовими та просторовими координатами адекватно описує процес теплопровідності у квазітвердих КПТ та враховує анізотропію теплових параметрів КПТ, зокрема, його коефіцієнтів теплового розширення та теплопровідності. Для аналізу в'язкості квазітвердих КПТ визначено дисипативну функцію для ізотропного й анізотропного випадків. Врахування в'язкості в рівняннях руху може бути здійснене шляхом заміни тензора напружень на тензор, який додатково враховує ще й «дисипативний» тензор напружень.

Ключові слова: теплопровідність, в'язкість, квазітверде капілярно-пористе тіло, музейний експонат, дисипативна функція.

Постановка проблеми. У музейному зберіганні на території України перебуває більше 11 мільйонів експонатів. Їхня кількість постійно зростає. Більшість предметів зберігання є складними виробами, у яких поєднуються матеріали з абсолютно різними фізичними, механічними та термодинамічними властивостями. При створенні умов зберігання неможливо врахувати особливості кожного конкретного експонату. Це призводить до змін перебігу тепломасообмінних процесів у матеріалах. Особливо чутливими до змінних тепловологісних умов є матеріали, які в процесі тверднення утворюють пористі структури (наприклад, фарбові шари живопису, фарбовані тканини, тощо). Такий клас матеріалів при певних умовах можна розглядати як квазітверді КПТ.

Зміна температури навколишнього середовища супроводжується процесами теплопереносу в матеріалі. У результаті виникають деформації, що інтенсифікують старіння та деструкцію експонатів. А це означає втрату безцінного надбання людства.

Зазвичай нерівномірний нагрів твердого середовища, зокрема, квазітвердого КПТ, не супроводжується конвекцією. Перенесення теплоти здійснюється лише за рахунок механізму теплопровідності. Для коректного математичного аналізу цього процесу в КПТ необхідно отримати повну систему рівнянь у частинних похідних за часовою та просторовими координатами. Вона має описувати розподіл температури в КПТ й одночасно враховувати переміщення, які виникають у тілі.

Дисипація енергії у квазітвердих КПТ обумовлена двома процесами:

1. Якщо в різних місцях таких тіл температура неоднакова, тоді в них виникають незворотні процеси теплопровідності;
2. Якщо в КПТ відбувається будь-який внутрішній рух, тоді виникають незворотні процеси, пов'язані зі скінченним значенням швидкості руху; ці процеси дисипації енергії у квазітвердих КПТ можна назвати процесами внутрішнього тертя чи в'язкості.

Оскільки швидкість макроскопічного руху в КПТ дуже мала, то дисипація енергії в тілі незначна. Такі «майже зворотні» процеси можна описувати за системою дисипативної функції (підхід Релея), котру треба визначити із урахуванням особливостей (структурних, кінематичних та ін.) КПТ.

Актуальність дослідження. Отримані в роботі результати дають можливість уточнення та вдосконалення інженерних методів розрахунку параметрів теплопровідності квазітвердих

КПТ музейних цінностей у змінних умовах внутрішнього середовища приміщень при моделюванні методами математичної фізики.

Останні дослідження та публікації. Детально процеси теплопровідності та в'язкості твердих тіл описані в роботі [1]. Деякі специфічні особливості твердих тіл, які визначаються їхніми пластичними властивостями та призводять до структурних змін і самоорганізації на різних рівнях організації твердих тіл, описані в роботах [2, 3].

На думку авторів даного дослідження, результати зазначених робіт можуть бути використані при моделюванні процесів теплопровідності та в'язкості КПТ.

Формулювання цілей статті. Мета роботи полягає в обґрунтуванні фізико-механічних і математичних моделей для опису процесів теплопровідності та в'язкості квазітвердих тіл типу капілярно-пористих.

Рівняння теплопровідності у квазітвердих КПТ. Нерівномірне нагрівання квазітвердих КПТ не призводить до виникнення в них конвекції, як це зазвичай має місце в рідинах. Тому процес перенесення теплоти здійснюється лише теплопровідністю. Тому процеси теплопровідності в КПТ описуються більш простими рівняннями, ніж у рідинах, де вони ускладнюються конвекцією.

Рівняння теплопровідності в КПТ, як квазітвердому тілі, може бути виведене безпосередньо з закону збереження енергії. Останній виражений у вигляді «рівняння нерозривності» для теплоти. Кількість теплоти, яка поглинається за одиницю часу t, с, на одиницю об'єму КПТ з температурою T, К, дорівнює $T{\cdot}\partial S'/\partial t$, Вт/м^3, де S – ентропія одиниці об'єму, Дж/(м^3 К). Ця величина повинна бути прирівняною до мінус div $\vec{q}$, Вт/м^3, де $\vec{q}$ – густина потоку теплоти, Вт/м^2. Цей потік може бути практично завжди записаний у вигляді $\vec{q} = -\kappa\nabla T$, Вт/м^2, тобто як пропорційний вектору градієнта температури ∇T, К/м, з коефіцієнтом пропорційності, рівним коефіцієнту теплопровідності κ, Вт/(м К). Таким чином,

$$T\frac{\partial S}{\partial t} = \mathrm{div}(\kappa\nabla T)\text{, Вт/м}^3. \quad (1)$$

Згідно з відомою формулою [1] ентропія

$$S = S_0(T) + K\alpha u_{ii}\text{, Дж/(м}^3\text{ К)}, \quad (2)$$

де α – коефіцієнт теплового розширення, К$^{-1}$, а S_0 – ентропія КПТ на одиницю об'єму, Дж/(м^3 К), у недеформованому стані; K – питома енергія деформування конкретної речовини (КПТ), Дж/м3; u_{ii} – компоненти тензора деформації. Будемо припускати, що різниці температури, К, наявні у КПТ, досить малі. Тому можна вважати постійними такі величини, як коефіцієнт теплопровідності κ, Вт/(м К), коефіцієнт температурного розширення α, К$^{-1}$ тощо. Тоді формули (1) і (2) дадуть залежність

$$T\frac{\partial S_0}{\partial t} + \alpha K T\frac{\partial u_{ii}}{\partial t} = \kappa\Delta T\text{, Вт/м}^3, \quad (3)$$

де $\Delta = \partial/\partial x + \partial/\partial y + \partial/\partial z$ – оператор Лапласа.

Згідно з відомою термодинамічною формулою маємо різницю об'ємної ізобарної C_p та ізохорної C_v, Дж/(м^3 К), теплоємності $C_p - C_v = K\alpha^2 T$, Дж/(м^3 К). Звідси маємо $\alpha K T = (C_p - C_v)/\alpha$.

Похідну від S_0 можна записати як

$$\frac{\partial S_0}{\partial t} = \frac{\partial S_0}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial t}\text{, Вт/(м}^3\text{ К)},$$

де похідна $\partial S_0/\partial T$, Дж/(м^3 К^2), береться при значенні $u_{ii} \equiv \mathrm{div}\,\vec{u} = 0$, тобто при постійному об'ємі; а $\vec{u}$ – вектор переміщення/деформації КПТ, м. Тоді $\partial S_0/\partial T = C_v/T$, Дж/(м^3 К^2).

У результаті отримаємо рівняння теплопровідності КПТ у наступному виді:

$$C_v\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{C_p - C_v}{\alpha}\frac{\partial}{\partial t}(\mathrm{div}\,\vec{u}) = \kappa\Delta T\text{, Вт/м}^3. \quad (4)$$

Щоб отримати повну систему рівнянь слід долучити рівняння, яке визначає деформацію нерівномірно нагрітого квазітвердого КПТ [1]

$$2(1-\sigma)\nabla(\mathrm{div}\,\vec{u}) - \\ -(1-2\sigma)\,\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\vec{u} = \frac{2\alpha(1+\sigma)}{3}\nabla T\text{, м}^{-1}, \quad (5)$$

де σ – коефіцієнт Пуассона КПТ.

З рівняння (5) може бути визначена деформація КПТ за довільно заданого розподілу температури T, К. Підставлення отриманого таким чином виразу для div u до рівняння (4) призведе до рівняння, яке визначає розподіл температури. У ньому невідомою функцією є лише $T(x, y, z, t)$, К.

Таким чином, повна система рівнянь для КПТ, яка зв'язує переміщення u, м/с, з температурою T, К, має вигляд

$$\begin{cases} C_v \dfrac{\partial T}{\partial t} + \dfrac{C_p - C_v}{\alpha} \dfrac{\partial}{\partial t}(\operatorname{div}\vec{u}) = \kappa \Delta T, \text{ Вт/м}^3; \\ 2(1-\sigma)\nabla(\operatorname{div}\vec{u}) - \\ \quad -(1-2\sigma)\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{u} = \dfrac{2\alpha(1+\sigma)}{3}\nabla T, \text{ м}^{-1}. \end{cases} \tag{6}$$

Розглянемо, наприклад, теплопровідність у необмеженому квазітвердому КПТ з розподілом температури, К, який задовольняє тільки одній умові: на нескінченності температура T, К, прямує до постійної границі T_0, К, і деформація відсутня. У такому випадку рівняння (5) призводить до залежності [1]

$$\operatorname{div}\vec{u} = \frac{1+\sigma}{3(1-\sigma)}\alpha(T - T_0). \tag{7}$$

Підставляємо вираз (7) до (4). Маємо рівняння

$$\frac{(1+\sigma)C_p + 2(1-2\sigma)C_v}{3(1-\sigma)} \frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \Delta T, \text{ Вт/м}^3. \tag{8}$$

Рівняння (8) відповідає простому рівнянню теплопровідності.

У найбільш загальному випадку з системи рівнянь (6) шляхом нескладних перетворень можна отримати

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\vec{u}) = \nabla\left(\frac{2(1-\sigma)}{1-2\sigma}\frac{\alpha}{C_p - C_v} \times \right.$$
$$\left. \times \left(\kappa \Delta T - C_v \frac{\partial T}{\partial t}\right) - \frac{2\alpha(1+\sigma)}{3(1-2\sigma)} T\right), \text{ м}^{-1}. \tag{9}$$

Отже, за заданого закону $T(x, y, z, t)$, К, переміщення/деформації КПТ як квазітвердого тіла визначаються градієнтами величин T, К, $\partial T/\partial t$, К/с, та ΔT, К/м^2. За фізичним змістом ці переміщення/деформації є наслідком зазначених змін температурного поля й відносяться до так званого вихрового механічного поля [2,3]. Останнє має компоненти $\operatorname{rot}\vec{u} \neq 0$, м$^{-1}$, і породжує у КПТ пластичні течії хвилеподібного типу.

Рівняння типу (8) описує також розподіл температури вздовж прямого тонкого стрижня/волокна (КПТ), якщо хоча б один з його кінців не закріплений. Розподіл температури впродовж кожного з поперечних перерізів такого стрижня/волокна (КПТ) можна вважати постійним. Тому температура T, К, буде функцією лише від координати x, м, уздовж його довжини та від часу t, с. Теплове розширення такого КПТ – стрижня/волокна призводить лише до зміни його довжини без зміни прямолінійної форми і без виникнення внутрішніх напружень у ньому. Тому зрозуміло, що похідна $\partial S/\partial t$, Вт/м^3, у загальному рівнянні (1) повинна братися при постійному тиску p, Па. Оскільки

$$\left.\frac{\partial S}{\partial T}\right|_{p=const} = \frac{C_p}{T}, \text{ Дж/(м}^3\text{ К}^2)$$

то розподіл температури буде описуватися одновимірним рівнянням теплопровідності

$$C_p \frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \text{ Вт/м}^3. \tag{10}$$

Слід, однак, підкреслити, що з практичної точки зору з достатньою точністю розподіл температури у квазітвердому КПТ може завжди визначитися простим рівнянням теплопровідності.

Другий член у лівій частині рівняння (4) є поправкою порядку $(C_p - C_v)/C_v$ до першого члену. Але у квазітвердих КПТ різниця між теплоємностями C_p й C_v, Дж/(м^3 К), зазвичай доволі мала. Якщо знехтувати поправкою, то рівняння теплопровідності у квазітвердих КПТ можна завжди записати у вигляді

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\kappa}{C_v}\Delta T = a\Delta T, \text{ К/с}, \tag{11}$$

де $a = \kappa / C$ – коефіцієнт температуропровідності, м^2/с; C – певна середня об'ємна теплоємність, Дж/(м^3 К).

Теплопровідність анізотропних квазітвердих КПТ. У анізотропному квазітвердому КПТ напрямок потоку теплоти q, Вт/м^2, не повинен збігатися з напрямком градієнту температури ∇T, К/м. Тому в анізотропному квазітвердому КПТ має місце більш загальна залежність

$$q_i = -\boldsymbol{\kappa}_{ik}\frac{\partial T}{\partial x_k}, (i, k) = \overline{(1,3)}, \text{ Вт/м}^2, \tag{12}$$

де $\boldsymbol{\kappa}_{ik}$ – тензор теплопровідності другого рангу для анізотропного квазітвердого КПТ, Вт/(м К). Для індексів, що повторюються у формулі (12) використано правило суми А. Ейнштейна. Відповідно до цієї залежності рівняння теплопровідності (11) буде мати більш загальний вигляд

$$C\frac{\partial T}{\partial t}=\mathbf{\kappa}_{ik}\frac{\partial^2 T}{\partial x_i\partial x_k}\ , \text{Вт/м}^3. \qquad (13)$$

Про тензор теплопровідності квазітвердого анізотропного КПТ можна довести загальну теорему, згідно з якою $\mathbf{\kappa}_{ik}$, Вт/(м К) є симетричним тензором

$$\mathbf{\kappa}_{ik}=\mathbf{\kappa}_{ki}\,,(i\,,k)=\overline{(1{,}3)}\ , \text{Вт/(м К)}. \qquad (14)$$

Співвідношення (14) є наслідком принципу симетрії кінетичних коефіцієнтів і доведене нижче.

Швидкість збільшення повної ентропії анізотропного квазітвердого КПТ завдяки незворотності процесів теплопровідності

$$\dot{S}_{повна}=-\int\frac{\operatorname{div}\vec{q}}{T}dV=$$

$$=-\int\operatorname{div}\left(\frac{\vec{q}}{T}\right)dV+\int\vec{q}\cdot\nabla\left(\frac{1}{T}\right)dV\ , \text{Вт/К}. \qquad (15)$$

Перший інтеграл у (15) є нульовим, що доводиться після перетворення його в інтеграл за поверхнею. Таким чином

$$\dot{S}_{повна}=\int\vec{q}\cdot\nabla\left(\frac{1}{T}\right)dV=-\int\frac{\vec{q}\cdot\nabla T}{T^2}dV\ , \text{Вт/К} \qquad (16)$$

або

$$\dot{S}_{повна}=-\int\frac{1}{T^2}q_i\frac{\partial T}{\partial x}dV\ , \text{Вт/К}. \qquad (17)$$

У даному випадку відповідають визначенню [1] кінетичних коефіцієнтів параметри $T^2\mathbf{\kappa}_{ik}$ у співвідношеннях

$$q_i=-T^2\,\mathbf{\kappa}_{ik}\frac{1}{T^2}\frac{\partial T}{\partial x_k},\ \text{Вт/м}^2,(i\,,k)=\overline{(1\,,3)} \qquad (18)$$

Тому з симетрії кінетичних коефіцієнтів безпосередньо випливає шукане співвідношення (14).

Квадратична форма

$$-q_i\frac{\partial T}{\partial x_i}=\mathbf{\kappa}_{ik}\frac{\partial T}{\partial x_i}\frac{\partial T}{\partial x_k}\ , \text{Вт К/м}^3, \qquad (19)$$

повинна бути суттєво додатною, оскільки додатною повинна бути похідна (17), Вт/(К с), від ентропії, Вт/к за часом t, с. Умовою суттєвої додатності квадратичної форми є додатність головних значень матриці її коефіцієнтів. Тому всі головні значення тензора теплопровідності анізотропного квазітвердого КПТ $\boldsymbol{\kappa}_{ik}$, Вт/(м К), завжди додатні, що випливає з міркувань про напрямок теплового потоку.

Кількість різних незалежних компонентів тензора $\boldsymbol{\kappa}_{ik}$, Вт/(м К), залежить від симетрії анізотропного квазітвердого КПТ. Оскільки цей тензор симетричний, зазначена кількість така ж, як і в симетричному тензорі теплового розширення другого рангу α_{ik}, $К^{-1}$.

В ізотропних КПТ теплове розширення відбувається одночасно у всім напрямках. Тому тензор деформації при вільному тепловому розширенні

$$\mathbf{u}_{ik}=\frac{1}{3}\alpha\left(T-T_0\right)\boldsymbol{\delta}_{ik}\ , \qquad (20)$$

де $\boldsymbol{\delta}_{ik}$ – тензор Кронекера, T_0 – початкова температура КПТ, К, T – поточна (у момент часу t, с) температура КПТ, К. Для анізотропних тіл слід записувати

$$\mathbf{u}_{ik}=\frac{1}{3}\boldsymbol{\alpha}_{ik}\left(T-T_0\right)\ , \qquad (21)$$

де $\boldsymbol{\alpha}_{ik}$ – деякий тензор другого рангу, симетричний за індексами i, k, $К^{-1}$. Цей тензор є аналогом коефіцієнта теплового розширення для анізотропного випадку.

З'ясуємо число різних незалежних компонентів цього тензора в анізотропних тілах різних систем симетрії. Для цього найпростіше скористатися відомим з тензорної алгебри правилом, що будь-якому симетричному тензору другого рангу можна привести у відповідність деякий тензорний еліпсоїд [1]. З міркувань симетрії безпосередньо очевидно, що при триклінній, моноклінній та ромбічній симетріях еліпсоїд є тривісним (тобто довжини всіх його осей різні). З тетрагональної, ромбоедричної й гексагональної симетрії еліпсоїд повинен бути еліпсоїдом обертання (з віссю, відповідно, уздовж всієї симетрії C_4, C_3 або C_6). Кубічна симетрія призводить до виродження еліпсоїда у кулю. Але тривісний еліпсоїд визначається трьома незалежними величинами (довжинами осей), еліпсоїд обертання – двома, а куля – усього однією (радіусом). Таким чином, число незалежних компонентів тензора $\boldsymbol{\alpha}_{ik}$, $К^{-1}$, в анізотропних тілах різної системи симетрії є:

- триклінна, моноклінна, ромбічна – три;
- тетрагональна, ромбоедрична, гексагональна – дві;
- кубічна – одна.

Анізотропні тіла перших трьох систем симетрії зазвичай називають двовісними, а других трьох – одновісними. Зазначимо, що теплове розширення анізотропних тіл кубічної системи симетрії визначаються всього однією величиною. Отже, вони поводяться стосовно теплового розширення як ізотропні тіла.

Наведемо узагальнену систему диференціальних рівнянь у частинних похідних за часовою та просторовою координатами, яка описує теплопровідність квазітвердого анізотропного КПТ та його деформацію, як нерівномірно нагрітого тіла. При цьому вважаємо, що КПТ має кубічну симетрію або є ізотропним тілом стосовно теплового розширення. Маємо

$$\begin{cases} C_v \dfrac{\partial T}{\partial x_k} - \dfrac{C_p - C_v}{\alpha} \dfrac{\partial}{\partial t}(\operatorname{div}\vec{u}) = \\ \qquad = \boldsymbol{\kappa}_{ik} \dfrac{\partial^2 T}{\partial x_i \partial x_k}, (i,k) = \overline{(1,3)}; \\ 2(1-\sigma)\nabla(\operatorname{div}\vec{u}) - (1-2\sigma)\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\vec{u}) = \\ \qquad = \dfrac{2\alpha(1+\sigma)}{3}\nabla T. \end{cases} \qquad (22)$$

З системи (22) можна визначити вектор переміщення/деформації анізотропного квазітвердого КПТ шляхом розв'язання рівняння

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\vec{u}) = \nabla\left(\frac{2(1-\sigma)}{1-2\sigma}\frac{\alpha}{C_p - C_v}\times\right.$$
$$\left.\times\left(\boldsymbol{\kappa}_{ik}\frac{\partial^2 T}{\partial x_i \partial x_k} - C_v\frac{\partial T}{\partial t}\right) - \frac{2\alpha(1+\sigma)}{3(1-2\sigma)}T\right),$$
$$(i,k) = \overline{(1,3)}. \qquad (23)$$

Якщо враховувати, що теплове розширення анізотропного квазітвердого КПТ описує тензор $\boldsymbol{\alpha}_{ik}$, $К^{-1}$, другого рангу, симетричний за індексами i, k, замість рівняння (23) матимемо

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\vec{u}) = \nabla\left(\frac{2(1-\sigma)}{1-2\sigma}\frac{\boldsymbol{\alpha}_{ij}}{C_p - C_v}\times\right.$$
$$\left.\times\left(\boldsymbol{\kappa}_{jk}\frac{\partial^2 T}{\partial x_j \partial x_k} - C_v\frac{\partial T}{\partial t}\right) - \frac{2\boldsymbol{\alpha}_{ik}(1+\sigma)}{3(1-2\sigma)}T\right),$$
$$(i,j,k) = \overline{(1,3)}. \qquad (24)$$

Отже, у випадку анізотропного квазітвердого КПТ градієнти функції температури ∇T, К/м, та її похідних за часом і просторовими координатами:

- $\nabla(\partial T/\partial t)$, К/(м с),
- $\nabla\Delta T$, К/(м с),
- $\partial^2 T/(\partial x_j \cdot \partial x_k)$, К/м^2 –

призводять до генерації в таких КПТ вихрових механічних полів переміщень/деформацій ($\operatorname{rot} u \neq 0$).

В'язкість квазітвердого КПТ. При вивченні руху у квазітвердих КПТ зазвичай вважають, що процес деформування є зворотним. У дійсності процес термодинамічно зворотний тільки якщо він відбувається з нескінченно малою швидкістю, тому в кожний момент часу в КПТ встигає встановитися стан термодинамічної рівноваги. Реальний рух відбувається зі скінченною швидкістю. КПТ не знаходиться у кожний даний момент у рівновазі. Тому в ньому відбуваються процеси, які намагаються привести його до рівноважного стану. Наявність цих процесів і призводить до незворотності руху. Зокрема, відбувається дисипація механічної енергії, яка переходить у теплоту в кінцевому підсумку. Під механічною енергією в даній роботі розуміється сума кінетичної енергії макроскопічного руху у квазіпружному/квазітвердому КПТ та його потенціальної (пружної) енергії, обумовленої наявністю деформації.

Дисипація енергії обумовлена процесами двох типів. По-перше, за неоднакової температури в різних місцях квазітвердого КПТ у ньому виникають незворотні процеси теплопровідності. По-друге, якщо у квазітвердому КПТ відбувається якийсь внутрішній рух, то наявні незворотні процеси, пов'язані зі скінченною швидкістю руху. Ці процеси дисипації енергії можна назвати, як і у рідинах, процесами внутрішнього тертя або в'язкості.

У більшості випадків швидкість макроскопічного руху у квазітвердому КПТ настільки мала, що дисипація енергії незначна. Такі «майже зворотні» процеси можуть бути описані за допомогою дисипативної функції [1].

Якщо існує деяка механічна система, рух якої супроводжується дисипацією енергії, то рух може бути описаний за допомогою звичайних рівнянь руху. У цих рівняннях слід до сил, що діють на систему, долучити так звані «дисипативні сили» або «сили тертя», які є мінімальними функціями швидкостей. Ці сили можуть бути враховані у формі похідних за швидкостями від деякої квадратичної функції швидкостей, яка зветься дисипативною функцією ψ, Вт/м^3, віднесеною на одиницю об'єму. «Сила тертя» на одиницю об'єму f_a, яка відповідає якійсь із узагальнених координат q_a системи, м, може бути записана у вигляді

$$f_a = -\frac{\partial \psi}{\partial \dot{q}_a}\text{, Н/м}^3, \qquad (25)$$

де $\dot{q}_a$ – швидкість, м/с.

Дисипативна функція ψ, Вт/м^3, є суттєво додатною квадратичною формою швидкостей $\dot{q}_a$, м/с. Зі співвідношення (25) при нескінченно малому процесі зміни швидкостей $\delta\dot{q}_a$, м/с, зміна дисипативної функції становитиме

$$\partial \psi = -\sum_a f_a \cdot \delta \dot{q}_a\text{, Вт/м}^3, \qquad (26)$$

де δ – символ варіації, тобто нескінченно малої зміни функції.

Можна також показати, що подвоєна дисипативна функція 2ψ, Вт/м^3, визначає зменшення механічної енергії, Дж/м^3, системи у одиницю часу, с.

Легко узагальнити співвідношення (26) на випадок руху з тертям у суцільному квазітвердому КПТ. У цьому випадку стан системи визначається неперервним рядом узагальнених координат. Цими координатами є вектор зміщення $\vec{u}$, м. Відповідне цьому співвідношенню цій точці квазітвердого КПТ. Відповідне цьому співвідношенню (26) рівняння повинне бути написане у інтегральному виді:

$$\delta \int \psi\, dV = -\int f_i\, \delta \dot{u}_i\, dV\ , \qquad (27)$$

де f_i – компонента вектора f, Н/м^3, сили, що діє на одиницю об'єму тіла. У рівнянні (27) повна дисипативна функція всього КПТ записана у вигляді $\int \psi dV$, Вт.

Визначимо тепер загальний вигляд дисипативної функції ψ, Вт/м^3, для деформованих квазітвердих КПТ. Ця функція повинна дорівнювати нулю, якщо в КПТ відсутній внутрішній рух. Частинними випадками є тільки поступальний або обертальний рух як ціле. Тобто дисипативна функція повинна перетворюватися на нуль при незмінному векторі переміщень $\vec{u}$ = const, м, або при похідній його за часом t, с, $\dot{u} = [\vec{\Omega} \times \vec{r}]$, м/с. Це означає, що функція ψ, Вт/м^3, повинна залежати не від самої швидкості, а від її градієнта. Вона може складатися лише з таких комбінацій похідних, котрі перетворюються у нуль при $\dot{u} = [\vec{\Omega} \times \vec{r}]$. Такими є суми

$$\widetilde{S}_{ik} = \frac{\partial \dot{u}_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \dot{u}_k}{\partial x_i}\text{, с}^{-1}, \qquad (28)$$

тобто похідні $\dot{\boldsymbol{u}}_{ik}$, с$^{-1}$,тензора деформації за часом t, с. Таким чином, дисипативна функція повинна бути квадратичною функцією від $\dot{\boldsymbol{u}}_{ik}$, с$^{-1}$. Найбільш загальний вигляд такої функції

$$\psi = \frac{1}{2} \boldsymbol{\eta}_{iklm} \dot{\boldsymbol{u}}_{ik} \dot{\boldsymbol{u}}_{lm}\text{, Вт/м}^3, \qquad (29)$$

де $\boldsymbol{\eta}_{iklm}$ – тензор четвертого рангу, Дж·с/м^3, який може бути названий тензором в'язкості квазітвердого КПТ. Цей тензор має очевидні властивості симетрії

$$\boldsymbol{\eta}_{iklm} = \boldsymbol{\eta}_{lmik} = \boldsymbol{\eta}_{kilm} = \boldsymbol{\eta}_{ikml}\text{, Дж·с/м}^3. \qquad (30)$$

В ізотропному квазітвердому КПТ тензор $\boldsymbol{\eta}_{iklm}$, Дж·с/м^3, має всього дві незалежні компоненти. Отже, функція ψ, Вт/м^3, може бути записана у вигляді

$$\psi = \eta \left(\dot{\boldsymbol{u}}_{ik} - \frac{1}{3} \boldsymbol{\delta}_{ik} \dot{\boldsymbol{u}}_{ee} \right)^2 + \frac{\zeta}{2} \dot{\boldsymbol{u}}_{ee}^2\text{, Вт/м}^3, \qquad (31)$$

де η та ζ – два коефіцієнти в'язкості, Дж·с. Оскільки ψ, Вт/м^3, є суттєво додатною функцією, тоді коефіцієнти η та ζ, Дж·с, повинні бути додатними.

Вираз для «дисипативної сили» f_i, Н/м^3, через тензор $\dot{\boldsymbol{u}}_{ik}$, с$^{-1}$, може бути записаний безпосередньо по аналогії з тим, як вільна енергія квазітвердого КПТ F_i, Дж/м^3, виражається через $\boldsymbol{u}_{ik}$. Маємо

$$f_i = \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}'_{ik}}{\partial x_k}\text{, Н/м}^3, \qquad (32)$$

де $\boldsymbol{\sigma}'_{ik}$ «дисипативний» тензор напружень, що визначається за формулою

$$\boldsymbol{\sigma}'_{ik} = \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{u}'_{ik}} = \boldsymbol{\eta}_{iklm} \dot{\boldsymbol{u}}_{lm}\text{, Па.} \qquad (33)$$

Урахування в'язкості в рівняннях руху може бути здійснене, відповідно, простим шляхом заміни тензора напружень $\boldsymbol{\sigma}'_{ik}$, Па, у цих рівняннях сумою $\boldsymbol{\sigma}_{ik} + \boldsymbol{\sigma}'_{ik}$, де $\boldsymbol{\sigma}_{ik}$ – тензор напружень, Па, від деформації.

В ізотропному квазітвердому КПТ

$$\boldsymbol{\sigma}'_{ik} = 2\,\eta\left(\dot{\boldsymbol{u}}_{ik} - \frac{1}{3}\boldsymbol{\delta}_{ik}\dot{\boldsymbol{u}}_{ee}\right) + \zeta\,\dot{\boldsymbol{u}}_{ee}\boldsymbol{\delta}_{ik}\text{, Па.} \qquad (34)$$

Цей вираз формально збігається з виразом для в’язкого тензора в рідині.

Висновки. Обгрунтовано фізично-механічну та математичну моделі процесів теплопровідності у музейних експонатах, які є квазітвердими КПТ. Ці експонати під дією змінних параметрів мікроклімату знаходяться в нерівноважному стані. У них постійно перебігають процеси теплопровідності та деформації, що інтенсифікує старіння та деструкцію. Визначена система диференціальних рівнянь у частинних похідних за часовою та просторовою координатами, яка описує просторово-часовий розподіл температури та вектора переміщень у КПТ. Враховано ефекти анізотропії коефіцієнтів теплопровідності та теплового розширення квазітвердого КПТ. Отримана в роботі дисипативна функція для квазітвердих КПТ в ізотропному випадку повинна бути врахована в рівняннях руху тіла при описі ефектів внутрішнього тертя у ньому. Результати роботи можуть бути в подальшому використані для уточнення й удосконалення інженерних методів розрахунку параметрів теплопровідності квазітвердих КПТ та ефектів внутрішнього тертя при їхньому моделюванні методами математичної фізики.

Література

1. Ландау Л.Д. Теоретическая физика. Т. VII. Теория упругости / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. – Москва: Наука, 1965 – 204 с.

2. Панин В. Е. Спектр возбужденных состояний и вихревое механическое поле в деформируемом кристалле / В. Е. Панин, Ю.В. Гринеев, В.Е. Егорушкин и др. // Известия вузов. Физика. – 1987. – Т. 30. – №1 – С. 34-51.

3. Зуев Л. Б. Пластическое течение как волновой процес / Л. Б. Зуев, В. И. Данилов, Н. М. Мних, А. И. Олемской // Известия вузов. Черная металургия. – 1990. – №10. – С. 79-81.

References

1. Landau L.D., Lifshitz L. D. *Teoreticheskaia fizika. Vol. VII. Teoriia uprugosti*. Nauka, 1965.

2. Panin V. E., Grineev Yu. V., Yegorushkin V. Ye. I dr. “Spektr vozbuzhdennykh sostoianii i vikhrevoe mekhanicheskoe pole v deformiruemom kristalle”. *Izvestiya vuzov. Fizika*. 1987. T. 30. No 1. P. 34-51.

3. Zuev L. B., Danilov V. I., Mnikh N. M., Olemskoi A.I. “Plasticheskoe techenie kak volnovoi process”. *Izvestiia vuzov. Chernaia metallurgiia*. 1990. №10. P. 79-81.

УДК 539.3

Функциональный анализ теплопроводности и вязкости квазитвёрдых капиллярно-пористых тел при переменных параметрах воздушной среды при музейном хранении

В. Б. Довгалюк[1], Ю. В. Човнюк[2], М. А. Шишина[3], А.С. Москвитина[4]

[1]д.т.н., проф. Киевский национальный университет строительства и архитектуры, г. Киев, Украина, 2280170@ukr.net, ORCID: 0000-0002-4836-5354

[2]к.т.н., доц. Национальный университет биоресурсов и природопользования Украины, г. Киев, Украина, ychovnyuk@ukr.net, ORCID: 0000-0002-0608-0203

[3]асист. Киевский национальный университет строительства и архитектуры, г. Киев, Украина, shyshyna.mo@knuba.edu.ua, ORCID: 0000-0001-9384-7662

[4]асист. Киевский национальный университет строительства и архитектуры, г. Киев, Украина, moskvitina.as@knuba.edu.ua, ORCID: 0000-0003-3352-0646

Аннотация. Приведён фундаментальный анализ теплопроводности и вязкости квазитвёрдых капиллярно-пористых тел (КПТ), которые являются материалами предметов музейного хранения. Среди прочего это – краски на картинах, окрашенные ткани и др. Изменение параметров воздушной среды приводит к возникновению градиента температуры в КПТ. Получена система дифференциальных уравнений в частных производных по временным и пространственным координатам, адекватно описывающая процесс теплопроводности в квазитвёрдых КПТ, в *которой учтена анизотропия тепловых параметров КПТ, в частности, его коэффициентов теплового расширения и теплопроводности. Для анализа вязкости квазитвёрдых КПТ определена диссипативная функция для изотропного и анизотропного случаев. Учёт вязкости в уравнениях движения может быть осуществлен путём замены тензора напряжений на тензор, который дополнительно учитывает еще и «диссипативный» тензор напряжений.*

Ключевые слова: теплопроводность, вязкость, квазитвёрдое капиллярно-пористое тело, диссипативная функция.

UDC 539.3

Functional analysis of thermal conductivity and viscosity of quasi-solid capillary-porous bodies under varying air environment conditions during museum storage

V. Dovhaliuk[1], Y. Chovniuk[2], M. Shyshyna[3], A. Moskvitina[4]
[1]Dr. Hab., professor. Kyiv National University of Construction and Architecture, Kyiv, Ukraine, 2280170@ukr.net,
ORCID: 0000-0002-4836-5354
[2]PhD, associate professor. National University of Life and Environmental Sciences of Ukraine, Kyiv, Ukraine, ychovnyuk@ukr.net,
ORCID: 0000-0002-0608-0203
[3]Assistant. Kyiv National University of Construction and Architecture, Kyiv, Ukraine, shyshyna.mo@knuba.edu.ua,
ORCID: 0000-0001-9384-7662
[4]Assistant. Kyiv National University of Construction and Architecture, Kyiv, Ukraine, moskvitina.as@knuba.edu.ua,
ORCID: 0000-0003-3352-0646

Abstract. Fundamental analysis of the thermal conductivity and viscosity of quasi-solid capillary-porous bodies (CPBs), which are museum exhibits' materials, is presented. The air environment parameters change leads to a temperature gradient in the CPBs. Non-uniform heating of the solid medium, in particular, quasi-solid CPB, is not accompanied by convection, and heat transfer is carried out only due to the mechanism of thermal conductivity. In order to create a mathematical model of this process in CPB, a system of partial differential equations in time and space coordinates is obtained. The resulting system adequately describes the thermal conductivity process in quasi-solid CPBs. The anisotropy of CPB's thermal parameters, especially, its coefficients of thermal expansion and thermal conductivity, is also taken into account. Theoretically, the deformation process during motion in quasi-solid CPB is taken as reversible. In real conditions, the process is thermodynamically reversible only when it occurs at an infinitesimal speed. Then at each point in time, the CPB is able to establish a thermodynamic equilibrium state. Real motion occurs at a finite velocity, the CPB is not in an equilibrium state at any given moment, so there are endogenous processes that try to get it into a balanced condition. The occurrence of these processes causes the irreversibility of motion, which acts, in particular, through the dissipation of mechanical energy, which eventually turns into heat. The energy dissipation is caused by irreversible processes of thermal conductivity and processes of internal friction or viscosity. The dissipative function for isotropic and anisotropic cases was determined in order to analyze the viscosity of quasi-solid CPBs. The viscosity in the equations of motion can be considered by replacing the stress tensor with a tensor, which additionally takes into account the "dissipative" stress tensor.

Keywords: thermal conductivity, viscosity, quasi-solid capillary-porous body, dissipative function.

Надійшла до редакції / Received 03.09.2020