УДК 551.551.8

Аналіз процесів тепломасообміну та деформації колоїдних капілярно-пористих тіл методами фрактального аналізу та дискретної нелінійної динаміки

В. Б. Довгалюк[1], Ю. В. Човнюк[2], М. О. Шишина[3]
[1]к.т.н., проф. Київський національний університет будівництва і архітектури, м. Київ, Україна, 2280170@ukr.net, ORCID: 0000-0002-4836-5354
[2]к.т.н., доц. Національний університет біоресурсів і природокористування України, м. Київ, Україна, ychovnyuk@ukr.net
[3]асист. Київський національний університет будівництва і архітектури, м. Київ, Україна, shyshyna.mo@knuba.edu.ua

Анотація. Наведений фрактальний аналіз довгострокових рядів параметрів колоїдних капілярно-пористих тіл, які знаходяться в умовах тепломасообміну з навколишнім середовищем і викликаної цим процесом деформації. Здійснене фрактальне оцінювання відповідної статистичної інформації щодо вологовмісту, температури та деформації вказаних тіл. Алгоритм розрахунку показника Херста заснований на R/S – аналізі. На основі методики передпрогнозного фрактального аналізу часових рядів (яка базується на послідовному R/S – аналізі) визначений рівень персистентності й розраховані параметри (середні величини) неперіодичних циклів часових рядів. Запропоновано критерій визначення середньої довжини періодичного і неперіодичного циклів, який заснований на згладжуванні V-статистики за допомогою звичайних плинних середніх та адаптивної плинної Кауфмана. Запропоновано також процедуру якісного аналізу часових рядів, для яких не підтверджується гіпотеза про наявність тренда, із застосуванням методів нелінійної динаміки й теорії хаосу. Розглянуті реальні часові ряди, що характеризують параметри тепломасообміну (температура, вологовміст), напруження та деформації у колоїдних капілярно-пористих тілах (модель художніх картин), які беруть участь у конвективному тепломасообміні з середовищем, яке їх оточує (приміщення, де розміщені музейні експонати); до складу останнього входять також системи штучного клімату музейних приміщень і потік відвідувачів музею, які знаходяться в цьому приміщенні на даний момент часу. Обґрунтуванням для подібних досліджень є теорема Такенса. Хаотичність досліджуваної динамічної системи, що задана часовими реалізаціями, встановлена за допомогою показника Ляпунова. Оцінка стійкості стану оцінювалася фрактальною розмірністю Хаусдорфа та індексом фрактальності. Візуальна оцінка часового ряду проводилася за допомогою процедури відновлення фазових траєкторій. У результаті аналізу фазових точок фазового простору виявлений розщеплений атрактор, що дає можливість говорити про його біфуркацію.

Ключові слова: тепломасообмін, деформація, напруження, капілярно-пористе тіло, колоїд, фрактальний аналіз, показник Херста, дискретна нелінійна динаміка, теорія хаосу, показник Ляпунова, фрактальна розмірність, індекс фрактальності, фазовий простір, біфуркація атрактора.

Постановка проблеми. Дослідження довгострокових рядів параметрів тепломасообміну, деформації та напружень у колоїдних капілярно-пористих тілах, котрі моделюють експонати музеїв, розміщені в приміщеннях зі штучним кліматом за наявності потоків відвідувачів музейного приміщення (у даний момент часу) – важлива й актуальна проблема. Розв'язанням її є використання статистичних часових рядів даних спостережень за вказаними вище характеристиками тепломасообміну та параметрами напружено-деформованого стану таких тіл. У рядах динаміки параметрів напружено-деформованого стану (НДС) та характеристиках тепломасообміну (температура, вологовміст) закодовано інформацію про минулий і теперішній стан колоїдних капілярно-пористих тіл. Отримання такої інформації за допомогою методу «розкодування» часових рядів є надзвичайно важливим. Цю інформацію можна використати для прогнозування подальшої динаміки та поведінки (як параметрів, характеристик, так і самих тіл в цілому) об'єктів дослідження.

Актуальність дослідження. Застосування методів нелінійної динаміки, теорії хаосу для дослідження довгострокових рядів параметрів тепломасообміну, деформації та напружень у колоїдних капілярно-пористих тілах дає можливість прогнозування та аналізу напружено-деформованого стану музейних експонатів.

Останні дослідження та публікації. Численні дослідження останніх десятиріч показали, що більшість динамічних процесів у природі описуються фрактальною геометрією [1-4]. Фрактальність означає самоподібність [5-8], тобто на різних масштабах часовий ряд зберігає свою структуру. У роботі [4] зазначається, що будь-який спосіб оцінювання можливості прогнозування зміни в часі показників динамічного ряду потребує врахування фрактальних властивостей самого часового ряду. Різного роду фрактальні структури у відкритих динамічних системах зумовлюють фрактальну поведінку показників таких систем. У роботах [6, 7, 9 10] наведено алгоритм визначення показника Херста, що характеризує ці властивості. Динаміка відкритих динамічних систем записується у вигляді часових рядів, які є основою для аналізу, моделювання та прогнозування подальшого їхнього розвитку. Якість прогнозування залежатиме від того, наскільки правильно проведено оцінку системи щодо її детермінованості. Сучасний математичний інструментарій, зокрема R/S-аналіз, запропонований Херстом [5, 6], є потужним засобом, який дає змогу встановити «ступінь хаотичності» системи. Якщо часовий ряд виявляє довготермінову пам'ять, то відповідна система значною мірою є детермінованою. При цьому ефективніше застосовувати метод нормованого розмаху Херста. Поставлене завдання вирішується із застосуванням методів R/S-аналізу. Цей метод дає можливість досліджувати ефекти довготривалої пам'яті в часових рядах [9, 10], а за певних його модифікацій прогнозувати циклічність параметрів у довгострокових рядах спостережень [11].

Алгоритм розрахунку показника Херста, заснований на R/S-аналізі, наведено за методикою [9]. Спочатку визначаються відхилення від середнього значення. На кожній ітерації отримуємо N значень X_t. Далі відбувається нормування розмаху діленням на стандартне відхилення S, яке знаходиться за N значеннями. Логарифмуємо R/S та N і будуємо на основі отриманих даних графік функції залежності значення R/S у логарифмічному масштабі. На графіку функції $\ln(R/S)$ від $\ln(t)$ знаходимо нахил через лінійну апроксимацію. Тангенс кута цього нахилу і є показником Херста, який пов'язаний із фрактальною розмірністю D кривої співвідношенням: $D = 2 - H$, де D – фрактальна розмірність кривої.

Показник H (Херста) за аналогією з узагальненим броунівським рухом може набувати значень від 0 до 1:

а) ($0< H <0,5$) або ($1,5 < D < 2$) – антиперсистентний або ергодичний часовий ряд («рожевий шум»). Спостерігається контртрендовість, схильність динамічної системи до постійної зміни тенденції (підвищення змінюється зниженням та навпаки). Стійкість антиперсистентної поведінки ряду залежить від того, наскільки H є близьким до 0. Чим H ближче до нуля, тим ряд більш мінливий або волатильний. Такий тип системи часто називають «повернення до середнього»;

б) ($H = 0,5$) або ($D = 1,5$) – числовий ряд абсолютно випадковий або стохастичний («білий шум»), відсутність довготривалої статистичної залежності (випадкова поведінка показника);

в) ($0,5 < H < 1$) або ($1 < D < 1,5$) – персистентний часовий ряд («чорний шум»), спостерігається тренд, збереження тенденції до підвищення чи зниження показника в минулому і майбутньому. При цьому, чим більше значення показника H, тим частіше за його підвищенням настає підвищення, а за зниженням – зниження.

Отже, відхилення показника Херста від 0,5 є своєрідним індикатором фрактальних властивостей процесів, які породжують часові ряди. Крім використання показника Херста, для аналізу тенденції ряду використовують кореляційне співвідношення для оцінки автокореляційного впливу попередніх значень динамічного ряду на його наступні значення й визначення майбутньої тенденції – міру автокореляції $C = 2^{2H-1}$ [9].

Слід зазначити, що більшість фізичних, технічних і природних процесів є нестійкими і нестаціонарними. Часові ряди, які представляють дані процеси, є комплексом різнотипних складових: складова функції тренду, циклічні компоненти з різними періодами повторення, флуктуації тощо. Тому особливо актуальним є використання методів їхнього передпрогнозного оцінювання, що може бути реалізоване саме на базі фрактального аналізу. Метод фрактального аналізу часових рядів – це один із напрямків аналізу, зокрема, процесів тепломасообміну та деформації колоїдних капілярно-пористих тіл, був запропонований Б. Мандельбротом і Р. Хадсоном [2, 3] та розвинутий Е. Петерсом та Е. Федером [4, 12] і, як складова частина методів дискретної нелінійної динаміки, призначений для дослідження нелінійності в динаміці часових рядів. Автором [13] запропонована методика передпрогнозного фрактального аналізу часових рядів, яка може бути використана для ідентифікації в часовому ряді довготривалої пам'яті, визначення середньої довжини періодичного та неперіодичного циклів (квазіциклів). Описаний метод, на думку авторів даного дослідження, може бути також успішно впроваджений в інформаційні системи обробки даних та прогнозування або системи підтримки прийняття рішень щодо стратегії зберігання колоїдних капілярно-пористих тіл, котрі знаходяться в умовах конвективного тепло- і масообміну з навколишнім середовищем.

Основою методики аналізу часових рядів є алгоритм фрактального *R*/*S*-аналізу для визначення показника Херста. Детально різні підходи до розрахунку показника Херста на основі процедури *R*/*S*-аналізу описані в ряді робіт як закордонних [4, 12], так і вітчизняних [13, 14, 15] авторів. У роботі [16] наводиться порівняння різних методик проведення фрактального аналізу для розрахунку показника Херста. Емпіричні правила та вказівки для *R*/*S*-аналізу, а також особливості візуального аналізу V-статистики для визначення середньої довжини неперіодичного циклу описані у роботі [4]. Про ефект довготривалої пам'яті в часових рядах описано у роботах [2, 4, 5].

Формулювання цілей статті. Розробка та опис методики передпрогнозного фрактального аналізу часових рядів, які характеризують основні параметри процесів тепломасообміну та деформації колоїдних капілярно-пористих тіл, що знаходяться в умовах постійного конвективного тепломасопереносу з навколишнім середовищем, формулювання в межах цієї методики критеріїв оцінювання середньої довжини неперіодичних і періодичних циклів, ідентифікація рядів з довготривалою пам'яттю, шляхом розрахунку показника Херста, на основі реалізації процедури послідовного *R*/*S*-аналізу.

Фрактальний *R*/*S*-аналіз часових рядів.

Фрактальний аналіз, як новий напрямок в аналізі динаміки показників, параметрів, характеристик процесів тепломасообміну та деформації колоїдних капілярно-пористих тіл стверджує, що розвиток вказаних процесів (в умовах постійного конвективного тепломасопереносу з навколишнім середовищем) у майбутньому, як і майбутні значення часових рядів, що показують ці процеси, залежить від ретроспективних змін. Вважаємо, що процеси тепломасообміну та деформації колоїдних капілярно-пористих тіл глобально загалом детерміновані і залежать від початкових умов, локально ж вони випадкові. Згідно з принципами фрактального аналізу, часові ряди мають фрактальну розмірність $1 < D < 2$, наділені властивостями масштабної інваріантності (самоподібності) і пам'яттю про свої початкові умови. Вважаємо, що часові ряди, які відповідають розвитку процесів тепломасообміну та деформації в капілярно-пористих (колоїдних) тілах, мають фрактальну структуру. Фрактальна розмірність вказує на ступінь «зазубреності» часового ряду. Наприклад, пряма лінія має фрактальну розмірність $D = 1$, якщо $D = 1{,}5$, то часовий ряд відповідає гаусовому випадковому процесу.

На практиці фрактальну розмірність замінюють показником Херста H, на основі якого визначається ступінь згладженості часового ряду [4, 6]. Показник H визначається на основі фрактальної розмірності за формулою $H = 2 - D$, де $0 \le H \le 1$. Якщо розбити часовий ряд на ν ділянок однакової довжини, тоді показник Херста може бути визначений таким чином: $(R/S)_v = \alpha \cdot v^H$, де $(R/S)_v$ – нормований розмах від накопиченого середнього; v – число часових відліків або кількість спостережень; α – константа, незалежна від v.

Іншими словами, показник Херста – це число $H \in [0,1]$, яке характеризує відношення складової функції тренда до білого шуму і може використовуватися для класифікації часових рядів: встановлення невипадкових часових рядів зі стійким трендом та випадкових рядів (серед яких негаусові). Розрахунок показника Херста може проводитися на основі процедури *R*/*S*-аналізу, який було запропоновано Б. Мандельбротом. У роботі [1] він обґрунтував його застосовність для дослідження фінансово-економічних процесів.

Залежно від значення показника Херста часового ряду виокремлюють такі класифікації:

- якщо показник H часового ряду близький до 0,5, тоді це свідчить про його випадковість. У цьому випадку не буде жодної кореляції між ретроспективними даними і прогнозними;
- чим ближче показник H до 1 ($H > 0{,}5$), тим більш персистентним або трендостійким є ряд. Припускається, що події не випадкові. І якщо виникає чітка тенденція часового ряду до зростання або падіння, то вона з великою ймовірністю збережеться і надалі;
- чим ближче показник H до 0 ($H < 0{,}5$), тим більш антиперсистентним є ряд.

У даному дослідженні для розрахунку показника Херста застосовується методика, яка запропонована у роботі [14].

Нехай заданий часовий ряд з n спостережень $Z = \{Z_i\}_{i=1}^{n}$. Для кожного з початкових відрізків даного часового ряду $Z = \{Z_i\}_{i=1}^{\tau}$ довжини $\tau = 3, 4, \ldots, n$ обчислимо середні значення за формулою $\overline{Z}_\tau = \frac{1}{\tau}\sum_{i=1}^{\tau} Z_i$, а накопичені відхилення знайдемо за формулою $X_{\tau,t} = \frac{1}{\tau}\sum_{i=1}^{t}(Z_i - \overline{Z}_i)$, $\tau = 3, 4, \ldots, n$, розмах $R_\tau = \max_{1 \le t \le \tau}(X_{\tau,t}) - \min_{1 \le t \le \tau}(X_{\tau,t})$. Тоді середньоквадратичне відхилення для кожного з відрізків визначається за формулою $S_\tau = \sqrt{\frac{1}{\tau}\sum_{i=1}^{t}(Z_i - \overline{Z_i})^2}$, $\tau = 3, 4, \ldots, n$. Розмах накопиченого відхилення нормалізується шляхом ділення на середньоквадратичне відхилення для кожного відрізка τ і будується графік залежності $\lg\frac{R_\tau}{S_\tau}$ від $\lg(\tau)$ (так звана R/S траєкторія). Далі на основі методу найменших квадратів (МНК) будується рівняння лінійної регресії, коефіцієнт при незалежній змінній якого буде показником Херста. Рівняння буде мати вигляд $\lg\frac{R_\tau}{S_\tau} = \lg\alpha + H\cdot\lg(\tau)$, де α = const.

Показник Херста можна також розглядати як функцію від τ [4]:

$$H(\tau) = \frac{lg\left[\frac{R_\tau}{S_\tau}\right]}{lg\left(\frac{\tau}{2}\right)}.$$

Поведінка побудованих на основі цієї функції H-траєкторій або залежності функції $H(\tau)$ від $\lg(\tau/2)$, а також R/S траєкторії, можуть бути використані для вияву таких властивостей часового ряду як:

1) інтервали довготривалої і короткотривалої залежності (ідентифікація у часовому ряді довготривалої пам'яті);

2) наявність циклічних складових і середньої довжини неперіодичного циклу.

Квазіциклом часового ряду можна назвати локально найбільшу ділянку часового ряду, яку можна умовно поділити на 2 частини, причому в першій частині спостерігається послідовність додатних (від'ємних) приростів членів ряду, а в другій частині – навпаки послідовність від'ємних (додатних) приростів. Якщо точки початку і закінчення квазіциклу знаходяться на одному рівні, то такий квазіцикл називається циклом. Під довжиною циклу (квазіциклу) розуміють кількість точок часового ряду, які утворюють цикл (квазіцикл). З теорії хаосу відомо, що під час руху будь-якої нелінійної системи завжди знаходиться точка, в якій втрачається пам'ять про початкові умови. Середньою довжиною циклу можна вважати цілочислову величину, яка характеризує стійку пам'ять для періодів, менших за цю величину.

Для знаходження довжини циклу (квазіциклу), як правило застосовується візуальний аналіз тенденцій кривої V-статистики. Він полягає у виявленні точок зміни тенденцій, що може сигналізувати про закінчення циклу, а також інтервалів зростання, стабілізації і спадання кривої, що при збільшенні числа спостережень визначає тяжіння процесу до персистентного або випадкового. Зростання V-статистики при збільшенні числа спостережень вказує на персистентність поточної ділянки ряду, а стабілізація – на переважання білого шуму. V-статистика розраховується за формулою:

$$V_\tau = \frac{R_\tau}{\sqrt{\tau}\cdot S_\tau}, \tag{1}$$

де R_τ – розмах; S_τ – середньоквадратичне відхилення, $\tau = 3, 4, \ldots, n$.

У роботі [4] вказано, що момент зміни тенденції графіка V-статистики, що виражається залежністю V_τ від $\lg(\tau)$ вказує на довжину, як періодичного, так і неперіодичного циклу.

2. Методика передпрогнозного фрактального аналізу часових рядів.

Методика передпрогнозного фрактального аналізу складається з таких алгоритмів:

1) розрахунку показника Херста на основі послідовного R/S-аналізу часового ряду;

2) визначення середньої довжини неперіодичного циклу й ідентифікація «довгої пам'яті» в часовому ряді;

3) відбору режимів підтримки штучного клімату в приміщеннях (музеїв), де зберігаються колоїдні капілярно-пористі тіла (модель художніх цінностей, наприклад, художні картини митців минулих століть), що постійно контактують (беруть участь у конвективному тепломасопереносі) з середовищем, яке їх оточує (параметри мікроклімату приміщення музею та основні характеристики (температура, вологовміст) потоку відвідувачів даного музейного приміщення). Вказаний відбір здійснюється на основі розрахованих за R/S-аналізом показників (за великим рахунком на цьому етапі вирішується «подальша доля» художньої цінності – чи перебуватиме вона у цьому приміщенні й у подальшому, чи потрібно її перемістити в інше приміщення (музею, сховища) з іншими мікрокліматичними умовами, прийнятними саме для цієї художньої цінності).

Наведемо умовний приклад опису вказаних алгоритмів, ілюструючи розрахунки для конкретної задачі.

<u>Приклад 1.</u>

Нехай задано часовий ряд вологовмісту колоїдного капілярно-пористого експонату (наприклад, картина). За період з 03.09.2007 р. до 05.03.2010 р., зібрані щоденні дані на момент закриття приміщення (музею), у якому знаходиться це тіло. Довжина часового ряду становить

775. Позначимо його через $\bar{Z} = \left\{ \bar{Z}_i \right\}_{i=1}^{n+1}$. Необхідно провести передпрогнозний аналіз цього ряду.

Крок 1. Візуалізуємо заданий часовий ряд, тобто побудуємо графік залежності $\bar{Z}_\tau$.

Крок 2. Реалізуємо процедуру послідовного R/S-аналізу. Розраховуємо показник Херста.

Для знаходження показника Херста будемо розглядати часовий ряд, який є результатом логарифмування вхідного ряду $\bar{Z}_\tau$. Ця вимога, що описана у роботі [4], не є обов'язковою. Позначимо новий часовий ряд через $Z = \left\{ Z_i \right\}_{i=1}^{n}$, де $Z_i = \dfrac{\lg\left(\bar{Z}_i\right)}{\lg\left(\bar{Z}_{i-1}\right)}$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Введемо позначення $X = (x_3, x_4, \ldots, x_n)$, де $x_\tau = \lg(\tau)$ і $Y = (y_3, y_4, \ldots, y_n)$, де $y_\tau = \lg(R_\tau/S_\tau)$, $\tau = 3, 4, \ldots, n$ і припустимо, що між факторами X та Y існує лінійна залежність $Y = a + bX$. Ідентифікуємо значення коефіцієнтів a і b з умови мінімізації функції $\sum_{\tau=3}^{n} \left\{ y_\tau - \left[\mathrm{a} + \mathrm{b} x_\tau \right] \right\}^2 \rightarrow min$ за методом найменших квадратів (МНК) [17]. У результаті для часового ряду Z отримали, наприклад, такі оцінки: $a = -0{,}549$, $b = 0{,}783$. Оцінка коефіцієнта b буде показником Херста часового ряду Z, тобто $H = 0{,}783$. Коефіцієнт детермінації становить $R^2 = 0{,}9198$.

Для ряду Z будуємо на одному графіку R/S та H-траєкторії та лінію регресії $Y = -0{,}549 + 0{,}783\,X$. (Всі графіки легко побудувати у програмах електронних таблиць).

Крок 3. Перевірка гіпотези про значущість показника Херста для ряду Z.

Особливістю розрахованої статистики є те, що для невеликого τ вона характеризується незначним відхиленням. Для перевірки значущості показника Херста з урахуванням відхилень статистики скористаємося підходом, запропонованим у роботі [18]. Розрахуємо значення:

$$E\left(\frac{R_\tau}{S_\tau}\right) = \frac{\Gamma\left(\dfrac{\tau - 1}{2}\right)}{\sqrt{\pi} \cdot \Gamma\left(\dfrac{\tau}{2}\right)} \cdot \sum_{i=1}^{\tau-1} \sqrt{\frac{\tau - i}{i}}, \qquad (4)$$

де $\Gamma(q)$ – гамма-функція аргументу q. Вираз (4) відповідає істинності основної гіпотези про випадковість часового ряду Z. Оскільки для великих значень τ значення гамма-функції ($\Gamma(q)$) швидко зростає при зростанні q, то в роботі [4] для $\tau > 300$ пропонується використовувати функцію Стірлінга:

$$E\left(\frac{R_\tau}{S_\tau}\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi(\tau - 1)}} \cdot \sum_{i=1}^{\tau-1} \sqrt{\frac{\tau - i}{i}}. \qquad (3)$$

Для ряду Z, який розглядається, теоретичний показник $E\left(R_\tau / S_\tau\right)$ за формулою (3) становить 0,5452. Отже, оскільки показник Херста для даного ряду $H = 0{,}783$, то гіпотеза про випадковість даного ряду відкидається. Значення показника Херста H вказує на те, що вхідний часовий ряд Z персистентний, а процес, що описується даним часовим рядом, характеризується наявністю довготривалої пам'яті та має трендостійкий характер.

Крок 4. Розрахунок середньої довжини неперіодичного циклу.

Критерій визначення довжини періодичного циклу на основі V-статистики базується на згладжуванні кривої V-статистики та ідентифікації моментів зміни початкової тенденції кривої з урахуванням згладжених значень. Згладимо ряд $V_\tau = 3, 4, \ldots, n$ за допомогою звичайної плинної середньої з періодом p за формулою:

$$S_{\tau+p} = \frac{1}{p} \cdot \sum_{j=0}^{p-1} V_{\tau+p-j}, \tau = 3, 4, \cdots, \mathrm{n-p} \qquad (4)$$

та адаптивної плинної середньої Кауфмана за формулою:

$$a_t = c_t \cdot V_t + (1 - c_t)\, a_{t-1}, \qquad (5)$$

де $c_t = \{E_t(f - S) + S\}^2$; $E_t = \dfrac{V_t - V_{t-r}}{\sum_{i=0}^{r-1} \left| V_{t-i} - V_{t-i-1} \right|}$ – коефіцієнт ефективності як відношення загального руху (вологовмісту тіла) до суми абсолютних значень шумового руху (вологовмісту) за період r; $t = \overline{(\tau + r, n)}$, а $f = 1 / (p_1 - 1)$ і $S = 2 / (p_2 - 1)$ – відповідно, швидкий і повільний коефіцієнти згладжування, $p_1 < p_2$.

Довжина неперіодичного циклу дорівнює k, якщо в момент k виконуються умови:

1) починаючи з моменту k, фіксується падіння індексу Кауфмана принаймні протягом двох наступних точок, тобто $a_k > a_k + 1 > a_k + 2$. Зазначимо, що до k-ої точки індекс Кауфмана повинен монотонно зростати, що пояснюється поведінкою V-статистики;

2) звичайна плинна середня у цей момент не перевищує значення індексу Кауфмана, тоб-

то $S_k < a_k$, $S_{k+1} < a_{k+1}$;

3) фіксується різка зміна тенденції V-статистики зі зростання на падіння: $V_{k-1} < V_k$, $V_k > V_{k+1}$. При цьому значення V-статистики у k-й точці досягає локального максимуму, перевищуючи значення простої плинної середньої та індексу Кауфмана: $V_k > a_k > S_k$.

Вибір фільтром плинної Кауфмана пояснюється адаптивним характером її коефіцієнтів. Таким чином, система за умови використання даного критерію може розраховувати величину неперіодичного циклу без втручання людини, тобто в автоматичному режимі.

Необхідно зазначити, що вісь абсцис для графіка, на якому будується V-статистика і плинні середні відповідає пролотарифмованим значенням τ. Тобто після отримання моменту, для якого виконуються вказані умови, точку з осі абсцис x_k треба використати для визначення самого k: $k = 10\lg(xk)$.

За графіком V-статистики і плинних середніх для ряду, який досліджується, можна побачити, що вказані умови виконуються при $x_k = 1{,}255$. Тобто величина неперіодичного циклу для даного часового ряду становить: $10\lg(1{,}255) \approx 18$ (при цьому, наприклад, на графіку V-статистики та плинних середніх видно, що $p = 7$, $\tau = 4$, $p_1 = 3$, $p_2 = 10$). Слід зазначити, що перевірка умов повинна здійснюватись (у цьому випадку), починаючи з точки $k = 10$, $x_k = 1$, так само як і побудова лінії регресії для визначення показника Херста. Це емпіричне правило сформульоване у роботі [4] (графік V-статистики та плинних середніх слід зображати у залежності від $\lg(\tau)$).

Критерій визначення середньої довжини неперіодичного циклу може базуватися на основі поведінки H- та R/S-траєкторій. Відомо, що момент перелому або різкої зміни початкової тенденції H-траєкторії, як правило, з такої, що зростає, на таку, що спадає, за умови, що R/S-траєкторія попередньо змінила свою початкову тенденцію, вказує на довжину циклу.

Позначимо через $F(Z)$ сімейство рядів фіксованої довжини m, кожен з яких будується з вхідного часового ряду Z методом плинного вікна, тобто ряди $\{z_i\}_{i=1}^{m}, \{z_i\}_{i=2}^{m+1}, \cdots, \{z_i\}_{i=n-m+1}^{n}$. Для кожного з цих рядів застосовуємо процедуру послідовного R/S-аналізу. Побудуємо відповідні H- та R/S-траєкторії і визначимо довжину циклів k_j, $j = \overline{(1, n-m+1)}$ з умови: точка k_j буде відповідати довжині циклу для часових рядів $\{z_i\}_{i=j}^{m+j-1}$, якщо H-траєкторія в точці k_{j+1} або k_{j+2} перетинає R/S-траєкторію. При цьому обидві траєкторії змінюють попередню тенденцію на спадання, починаючи з точки k_j, тобто

$$H_{k_j+1} < H_{k_j} \ i \ \left(\frac{R}{S}\right)_{k_j+1} < \left(\frac{R}{S}\right)_{k_j}, \left(\frac{R}{S}\right)_{k_j+2} < \left(\frac{R}{S}\right)_{k_j+1}$$

і R/S-траєкторія не знаходиться в зоні антиперсистентності, тобто $(R/S)_{k_j} < 0{,}5$.

Далі побудуємо гістограму розподілу довжини циклів k_j для сімейства часових рядів $\{z_i\}_{i=j}^{m+j-1}$, $j = \overline{(1, n-m+1)}$. На основі гістограми можна оцінити середню довжину циклу. Для вхідного ряду медіана становить, наприклад, 18, а середнє значення – 18,81. Тобто середня довжина циклу становить 18 (днів, місяців, років або годин).

Кожен з описаних критеріїв показує високу ефективність встановлення величини циклів під час роботи в автоматичному режимі.

Крок 5. Дослідження поведінки показника Херста в динаміці.

З метою більш детального аналізу часового ряду пропонується досліджувати поведінку показника Херста в динаміці. Результати цього дослідження можуть використовуватися для розбиття ряду на ділянки за рівнем їх персистентності. Це дозволяє прослідкувати поточний розвиток процесу та спрогнозувати його на майбутнє. Плинний показник – це функція, яка будується за показниками Херста для сімейства рядів $F(Z)$, які утворюються з досліджуваного часового ряду Z методом плинного вікна. Для часового ряду, який досліджується, графік зміни показника Херста демонструє те, що часовий ряд персистентний як загалом, так і на локальних відрізках (m=500).

Крок 6. Визначення якості обраних режимів створення штучного клімату в музейному приміщенні, де зберігаються колоїдні капілярно-пористі матеріали, що представлені часовими рядами їхніх параметрів (вологовміст, температура, деформація, напруження).

Задача формулювання на основі R/S-аналізу критерію відбору оптимальних режимів створення штучного клімату в музейних приміщеннях, які представляються часовими рядами характерних параметрів тепловологопереносу, також може ставитися з точки зору оцінки ризиків деструкції художніх цінностей (картини майстрів минулих століть, зокрема). Ця задача може бути використана для побудови критеріїв вибору режимів систем, які створюють штучний клімат у приміщенні музею. Задача, яка ставиться перед суб'єктом, який приймає рішення, у даному випадку полягає у виборі з множини можливих режимів таких, створення котрих у музейному приміщенні забезпечило б максимальний позитивний ефект відповідно до вимог суб'єкта (як правило це директор музею) з урахуванням ризиків деструкції художніх цінностей музею. При цьому враховується наявність потоку відвідувачів музею, які вносять у приміщення збурення характеристик тепломасообміну розміщених тут колоїдних капілярно-пористих тіл.

Нехай кожному режиму створення штучного мікроклімату ставиться у відповідність ретроспективна інформація у вигляді часового ряду характерних параметрів тепломасообміну колоїдних капілярно-пористих тіл. Режим, який забезпечує конкретний варіант штучного мікроклімату музейного приміщення, вважатимемо якісним (серед іншого, й за показниками економічної ефективності), якщо:

1) часовий ряд є рядом з довготривалою пам'яттю;

2) поведінка показника Херста в динаміці демонструє стійку персистентність на ділянці ряду, яка передує моменту початку запровадження режиму штучного мікроклімату;

3) при високих значеннях показника Херста та за умови наявності короткий циклів можна стверджувати, що режим обраний вдало, і навпаки, якщо значення показника Херста низькі, то у випадку наявності довгих циклів, можна стверджувати, що режим обраний невдало.

Приклад 2.

Нехай відомі з архівних даних динамічні ряди зміни температури, вологовмісту, параметрів напружено-деформованого стану колоїдних капілярно-пористих тіл, розміщених у музейних приміщеннях за 100, 40 і 20 років. При цьому обчислені статистичні параметри тепломасообміну вказаних вище тіл, а саме: показник Херста (H), фрактальна розмірність (*ФР*), коефіцієнт автокореляції ряду (C). ці параметри визначені за зиму, весну, літо, осінь та за рік, а потім усереднені за весь період визначення (100, 40, 20 років) (див. табл. 1). В останньому стовпчику вказаної таблиці наведена вірогідна характеристика ряду. При цьому C визначається зі співвідношення $C = 2^{2H-1} - 1$.

Слід зазначити, що коефіцієнт автокореляції ряду становить:

а) для випадкового варіанту характеристики ряду ($H = 0{,}5$) – $C = 0$;

б) для антиперсистентного (ергодичного) часового ряду («рожевий шум») – $C < 0$ ($0 < H < 0{,}5$);

в) для персистентного часового ряду («чорний шум») – $C > 0$ ($1 > H > 0{,}5$).

Висновки. Проведення процедури R/S-аналізу характерних параметрів тепломасообміну колоїдних капілярно-пористих тіл, розміщених в приміщеннях музеїв (серед яких зі штучним мікрокліматом), дозволяє виявляти проміжки часових масштабів антиперсистентності/персистентності поведінки рядів (указаних параметрів) за тривалий період часу (моніторингу), а також наявність циклів. Запропоновані в роботі методика передпрогнозного фрактального аналізу часових рядів параметрів, критерії для визначення середньої довжини періодичного і неперіодичного циклів та інших фрактальних характеристик можуть бути застосовані для вибору оптимальних режимів функціювання систем штучного мікроклімату у музейних приміщеннях, де зберігаються художні цінності. На основі проведених теоретичних досліджень за допомогою комп'ютерного моделювання можна встановити, що більшість часових рядів, які характеризують еволюцію характерних параметрів, котрі описують процеси тепломасообміну в колоїдних капілярно-пористих тілах, є більш або менш персистентними і наділені довготривалою пам'яттю про свої початкові умови (створення конкретної художньої цінності). Також, якщо H-траєкторія для малих значень τ деякого часового ряду демонструє різку зміну тенденції на спадання, причому значення H_τ опиняються нижче рівня, то це може свідчити про те, що ряд не належить до часових рядів з довгою пам'яттю. Але остаточний висновок можна зробити з урахуванням показник Херста, який у цьому випадку буде близьким або меншим за теоретичний показник $E(R_\tau/S_\tau)$.

Таблиця 1

Статистична оцінка характерних параметрів процесів тепломасообміну та напружено-деформованого стану колоїдних капілярно-пористих тіл, розміщених у музейних приміщеннях (конкретного музею) за період 1913-2015 рр.

Період визначення, років	Статистичний параметр	Періоди визначення за:					Вірогідна характеристика ряду
		зиму	весну	літо	осінь	рік	
Температура в приміщенні, °С							
100	Показник Херста (Н) Фрактальна розмірність (ФР) Коефіцієнт автокореляції ряду (С)	0,335 1,67 -0,205	0,310 1,69 -0,231	0,325 1,68 -0,215	0,317 1,68 -0,224	0,310 1,69 -0,232	Антиперси-стентний
40	Показник Херста (Н) Фрактальна розмірність (ФР) Коефіцієнт автокореляції ряду (С)	0,378* 1,63 -0,156	0,344 1,65 -0,195	0,325 1,67 -0,215	0,375* 1,63 -0,159	0,319 1,68 -0,222	Антиперси-стентний
20	Показник Херста (Н) Фрактальна розмірність (ФР) Коефіцієнт автокореляції ряду (С)	0,410 1,59 -0,117	0,362 1,64 -0,174	0,415 1,59 -0,111	0,388 1,61 -0,156	0,319** 1,68 -0,224	Випадковий
Вологовміст, %							
100	Показник Херста (Н) Фрактальна розмірність (ФР) Коефіцієнт автокореляції ряду (С)	0,317 1,683 -0,224	0,290 1,710 -0,331	0,322 1,669 -0,205	0,323 1,667 -0,218	0,335 1,665 -0,205	Антиперси-стентний
40	Показник Херста (Н) Фрактальна розмірність (ФР) Коефіцієнт автокореляції ряду (С)	0,353 1,647 -0,184	0,395 1,605 -0,135	0,372 1,628 -0,163	0,386 1,614 -0,146	0,353 1,647 -0,184	Випадковий
20	Показник Херста (Н) Фрактальна розмірність (ФР) Коефіцієнт автокореляції ряду (С)	0,412 1,558 -0,159	0,375 1,625 -0,159	0,388 1,612 -0,156	0,403 1,597 -0,126	0,401 1,591 -0,190	Випадковий
Деформації, %							
100	Показник Херста (Н) Фрактальна розмірність (ФР) Коефіцієнт автокореляції ряду (С)	0,331 1,669 -0,209	0,301 1,699 -0,241	0,332 1,688 -0,205	0,320 1,679 -0,283	0,310 1,691 -0,232	Антиперси-стентний
40	Показник Херста (Н) Фрактальна розмірність (ФР) Коефіцієнт автокореляції ряду (С)	0,347** 1,653 -0,191	0,389 1,611 -0,143	0,369 1,631 -0,166	0,371 1,631 -0,165	0,381 1,619 -0,152	Випадковий
20	Показник Херста (Н) Фрактальна розмірність (ФР) Коефіцієнт автокореляції ряду (С)	0,433 1,567	0,378 1,622	0,321 1,681	0,371 1,631	-0,471 1,532	Випадковий
Напруження, МПа							
100	Показник Херста (Н) Фрактальна розмірність (ФР) Коефіцієнт автокореляції ряду (С)	0,204 1,790 -0,337	0,230 1,721 -0,339	0,336 1,664 -0,203	0,349 1,651 -0,189	0,334 1,666 -0,206	Антиперси-стентний
40	Показник Херста (Н) Фрактальна розмірність (ФР) Коефіцієнт автокореляції ряду (С)	0,305* 1,651 -0,238	0,374 1,626 -0,161	0,421 1,588 -0,105	0,373 1,627 -0,173	0,361 1,639 -0,175	Випадковий
20	Показник Херста (Н) Фрактальна розмірність (ФР) Коефіцієнт автокореляції ряду (С)	0,301 1,699 -0,241	0,321 1,679 -0,219	0,321 1,679 -0,219	0,248 1,752 -0,263	0,377** 1,623 -0,157	Антипер-систентний

Примітки:
* – випадковий, ** – антиперсистентний

Література

1. Mandelbrot B. B. When can price be arbitraged efficiently? A limit to the validity of the random walk and martingale models / B. B. Mandelbrot // Review of Economics and Statistics. – 1971. – Vol. 53. – No 3.- P. 225-236. DOI: 10.2307/1937966

2. Mandelbrot B. B. Statistical methodology for Non-Periodic cycles: from the covariance to R/S analysis / B. B. Mandelbrot //Annals of Economic and Social Measurement. – 1972. – Vol. 1. – No 3. – P. 259-290.

3. Mandelbrot B. B., Hudson The (mis) behavior of markets: a fractal view of risk, ruin and reward / B. B. Mandelbrot, R. Hudson R. New York, N.Y.: Basic Books, 2004 – 328 p.

4. Peters E. E. Fractal market analysis: applying chaos theory to investment and economics / E. E. Peters. – N.Y.: John Wiley & Sons, Inc., 1994. – 336 p.

5. Parzen E. Long memory of statistical time series modeling / E. Parzen. – Texas A&M University, NBER/NSF

Time Series Confrence, 2004. – 10 p.

6. Hurst H. E. Long-term storage of reservoirs / H. E. Hurst // Transactions of the American Society of Civil Engineers. – 1951. – Vol. 116. – P. 770-799.

7. Hurst H. E. Long-term storage capacity of reservoirs / H. E. Hurst //Transactions of the American Society of Civil Engineers. – 1951. – Vol. 116. – P. 799-808.

8. Моисеев К. Г. Применение методов подобия к физическому эксперименту. Физические, химические и климатические факторы продуктивности полей / К.Г. Моисеев. – СПб.: ПИЯО РАН, 2007. – С. 72-77.

9. Найман Э. Расчёт показателя Херста с целью выявления трендовости (персистентности) финансовых рынков и макроэкономических индикаторов // Экономист. – 2009. – №. 10. – С. 25-29.

10. Лыков И. А. Влияние изменения функции Хёрста на возможности экономического прогнозирования / И. А. Лыков, С. А. Охотников // Фундаментальные исследования. – 2013. – Т. 7. – №. 10. – С. 294-297.

11. Грицюк П. М. Дослідження циклічності природних процесів методом полігармонічного аналізу / П. М. Грицюк. – Штучний інтелект. – 2006. – №. 2. – С. 294-297.

12. Федер Е. Фракталы / Е. Федер, Ю. А. Данилов, А. Шукуров. – Мир, 1991. – 254 с.

13. Берзлев О. Ю. Методика передпрогнозного фрактального аналізу часових рядів / О. Ю. Берзлев // Управління розвитком складних систем. – 2013. – №. 16. – С. 76-81.

14. Максишко Н. К. Анализ и прогнозирование эволюции экономических систем / Н. К. Максишко, В. А. Перепелица. – Запорожье: Полиграф. – 2006.

15. Кириченко Л. О. Оценивание самоподобия стохастического временного ряда методом вейвлет-анализа / Л. О. Кириченко, Ж. В. Дейнеко // Радіоелектронні і комп’ютерні системи. – 2009. – №. 4. – С. 99–105.

16. Даниленко В. А. Альтернативные методики проведения фрактального анализа / В. А. Даниленко // Экономика промышленности. – 2010. – №. 2 (50). – С. 8-12.

17. Снитюк В. Є. Прогнозування. Моделі, методи, алгоритми / В. Є. Снитюк. – Київ: Маклаут. – 2008. – 364с.

18. Annis A. A., Lloyd E. H. The expected value of the adjusted rescaled Hurst range of independent normal summands / Annis A. A., Lloyd E. H. // Biometrika. – 1976. – Т. 63. – №. 1. – С. 111-116. DOI: 10.2307/2335090

References

1. Mandelbrot B. B. “When can price be arbitraged efficiently? A limit to the validity of the random walk and martingale models.” *Review of Economics and Statistics*. 1971. Vol. 53.No 3. P. 225-236. DOI: 10.2307/1937966

2. Mandelbrot B. B. “Statistical methodology for Non-Periodic cycles: from the covariance to R/S analysis.” *Annals of Economic and Social Measurement*. 1972. No 1. P. 259-290.

3. Mandelbrot B. B., Hudson R. *The (mis) behavior of markets: a fractal view of risk, ruin and reward.* Basic Books, 2004.

4. Peters E. E. *Fractal market analysis: applying chaos theory to investment and economics*. John Wiley & Sons, Inc., 1994.

5. Parzen E. *Long memory of statistical time series modeling.* Texas A&M University, NBER/NSF Time Series Confrence, 2004.

6. Hurst H. E. “Long-term storage of reservoirs.” *Transactions of the American Society of Civil Engineers*. 1951. Vol. 116. P. 770-799.

7. Hurst H. E. “Long-term storage capacity of reservoirs.” *Transactions of the American Society of Civil Engineers*. 1951. Vol. 116. P. 799-808.

8. Moiseev K. G. *Primenenie metodov podobiya k fizicheskomu eksperimentu. Fizicheskie, himicheskie i klimaticheskie faktory produktivnosti poley*. PIYAO RAN, 2007. pp. 72-77.

9. Nayman E. “Raschet pokazatelya Hersta s tselyu vyiyavleniya trendovosti (persistentnosti) finansovyih rynkov i makroekonomicheskih indikatorov.” *Ekonomist*. 2009. №. 10. pp. 25-29.

10. Lykov I. A., Ohotnikov S. A. “Vliyanie izmeneniya funktsii Hersta na vozmojnosti ekonomicheskogo prognozirovaniya.” *Fundamentalnyie issledovaniya*. 2013. Vol. 7. № 10. pp. 294-297.

11. Gritsyuk P. M. “Doslidjennya tsiklichnosti prirodnih protsesiv metodom poligarmonichnogo analizu.” *Shtuchniy intelekt*. 2006. №. 2. pp. 294-297.

12. Feder E., Danilov Yu. A., SHukurov A. *Fraktaly*. Mir, 1991.

13. Berzlev O. Yu. “Metodika peredprognoznogo fraktalnogo analizu chasovih ryadiv.” *Upravlinnya rozvitkom skladnih sistem*. 2013. №. 16. pp. 76-81.

14. Maksishko N. K., Perepelitsa V. A. *Analiz i prognozirovanie evolyutsii ekonomicheskih sistem.* Poligraf. 2006.

15. Kirichenko L. O., Deyneko J. V. “Otsenivanie samopodobiya stohasticheskogo vremennogo ryada metodom veyvlet-analiza.” *Radioelektronni i kompyuterni sistemi*. 2009. №. 4. pp. 99–105.

16. Danilenko V. A. “Alternativnyie metodiki provedeniya fraktalnogo analiza.” *Ekonomika promyishlennosti*. 2010. №. 2 (50). pp. 8-12.

17. Snityuk V. E. *Prognozuvannya. Modeli, metodi, algoritmi.* Maklaut. 2008.

18. Annis A. A., Lloyd E. H. “The expected value of the adjusted rescaled Hurst range of independent normal summands.” *Biometrika*. 1976. Vol. 63. №. 1. pp. 111-116. DOI: 10.2307/2335090

УДК 551.551.8

Анализ процессов тепломассообмена и деформации коллоидных капиллярно-пористых тел методами фрактального анализа и дискретной нелинейной динамики

В. Б. Довгалюк[1], Ю. В. Човнюк[2], М. О. Шишина[3]
[1]к.т.н., проф. Киевский национальный университет строительства и архитектуры, г. Киев, Украина, 2280170@ukr.net, ORCID: 0000-0002-4836-5354
[2]к.т.н., доц. Национальный университет биоресурсов и природопользования Украины, г. Киев, Украина, ychovnyuk@ukr.net
[3]асист. Киевский национальный университет строительства и архитектуры, г. Киев, Украина, shyshyna.mo@knuba.edu.ua

Аннотация. Приведён фрактальный анализ долгосрочных рядов параметров коллоидных капиллярно-пористых тел, находящихся в условиях тепломассообмена с окружающей средой и вызванной этим процессом деформации. Осуществлено фрактальное оценивание соответствующей статистической информации по влагосодержанию, температуре и деформации указанных тел. Алгоритм расчёта показателя Хёрста основан на R/S-анализе. На основе методики предпрогнозного фрактального анализа временных рядов (основанной на последовательном R/S-анализе) определён уровень персистентности и рассчитаны параметры (средние величины) непериодических циклов временных рядов, предложен критерий определения средней длины периодического и непериодического циклов, который основан на сглаживании V-статистики с помощью обычных скользящих средних и адаптивной скользящей Кауфмана. Предложена также процедура анализа временных рядов, для которых не подтверждается гипотеза о наличии тренда, с применением методов нелинейной динамики и теории хаоса. Рассмотрены реальные временные ряды, характеризующие параметры тепломассообмена (температура, влагосодержание), напряжения и деформации в коллоидных капиллярно-пористых телах (модель художественных картин), которые принимают участие в конвективном тепломассообмене с окружающей их средой (помещение, где размещены музейные экспонаты); в состав последнего входят также системы искусственного климата музейных помещений и поток посетителей музея, которые находятся в этом помещении в данный момент времени. Обоснованием для подобных исследований является теорема Такенса. Хаотичность исследуемой динамической системы, заданная временными реализациями, установлена с помощью показателя Ляпунова. Устойчивость состояния оценивалась фрактальной размерностью Хаусдорфа и индексом фрактальности. Визуальная оценка временного ряда проводилась с помощью процедуры восстановления фазовых траекторий. В результате анализа фазовых точек фазового пространства обнаружен расщепленный аттрактор, что даёт возможность говорить о его бифуркации.

Ключевые слова: тепломассообмен, деформация, напряжение, капиллярно-пористое тело, коллоид, фрактальный анализ, показатель Хёрста, дискретная нелинейная динамика, теория хаоса, показатель Ляпунова, фрактальная размерность, индекс фрактальности, фазовое пространство, бифуркация аттрактора.

UDC 551.551.8

Analysis of Heat And Mass Transfer and Deformation of Colloid Capillary-Porous Bodies Processes by Fractal Analysis and Discrete Nonlinear Dynamics Methods

V. Dovhaliuk[1], Y. Chovniuk[2], M. Shyshyna[3]
[1]PhD, professor. Kyiv National University of Construction and Architecture, Kyiv, Ukraine, 2280170@ukr.net, ORCID: 0000-0002-4836-5354
[2]PhD, associate professor. National University of Life and Environmental Sciences of Ukraine, Kyiv, Ukraine, ychovnyuk@ukr.net
[3]Assistant. Kyiv National University of Construction and Architecture, Kyiv, Ukraine, shyshyna.mo@knuba.edu.ua, ORCID: 0000-0001-9384-7662

Abstract. The fractal analysis of long-term series of parameters of colloidal capillary-porous bodies in conditions of heat and mass transfer to the environment and the resulting deformation process are presented. A fractal estimation of relevant statistical information on the moisture content, temperature and deformation of the above bodies is carried out. The algorithm for calculating the Hurst exponent is based on the R/S analysis. On the basis of the methodology for pre-predictive fractal analysis of time series (based on the sequential R/S analysis), the level of persistence is determined and *the parameters (average values) of aperiodic cycles of time series are calculated. Based on smoothing of V-statistics using the ordinary moving averages and Kaufman's adaptive moving average, the criterion for determining the average length of periodic and aperiodic cycles is proposed. The procedure of qualitative analysis of time series for which the hypothesis about the presence of a trend is not confirmed, using methods of nonlinear dynamics and chaos theory is also proposed. The real time series representative of the heat and mass transfer parameters (temperature, moisture content), stress and deformation in colloidal capillary-porous bodies (model of artistic paintings) involved in convective heat and mass transfer to their environment (premises where the museum exhibition is located) are examined; the latter also includes the artificial climate systems for museum premises and the museum visitors flow being present in this area at this time. Tuckens's theorem is the support for such studies. The chaotic nature of the dynamical system under study, as prescribed by the time realizations, is determined with Liapunov exponent. The estimation of the persistence was evaluated using Hausdorff fractal dimension and fractal index. The visual estimation of time series was carried out using procedure for the reconstruction of phase trajectories. As a result of the phase area's phase points analysis, a split attractor is discovered allowing to suppose its bifurcation.*

Keywords: heat and mass transfer, deformations, stress, capillary-porous bodies, colloids (colloidal materials), methods, fractal analysis, Hurst exponent, discrete nonlinear dynamics, chaos theory, qualitative analysis, time series, Liapunov exponent, fractal dimension, fractal index, phase area, attractor, attractor bifurcation.

Надійшла до редакції / Received 21.01.2019