УДК 620.91:004.94

Чисельне вирішення задач однофазної неізотермічної фільтрації

І. Е. Фуртат[1], О. М. Кравчук[2]
[1]к.т.н., доц. НТУУ «КПІ ім. І. Сікорського», м. Київ, Україна, i.e.furtat@gmail.com
[2]студ. НТУУ «КПІ ім. І. Сікорського», м. Київ, Україна, o.m.kravchuk@ukr.net

Анотація. Створення геотермальних циркуляційних систем передбачає прогнозовану оцінку ефективності її роботи. Важливе місце в цьому займають дослідження процесів тепломасопереносу в підземному колекторі чисельним методом. У даній роботі розглянута математична модель процесу теплообміну і фільтрації термальної води в пласті та запропонована методика чисельного вирішення задачі неізотермічної фільтрації, яка базується на методі додаткових джерел. Метод полягає в тому, що в нелінійних диференціальних рівняннях теплопровідності та фільтрації можна виділити лінійну й нелінійну частини та представити їх у вигляді лінійних рівнянь з розподіленими джерелами. Верифікація даної методики буде проведена в подальших дослідженнях. Результати роботи можуть бути використані для визначення та вдосконалення термодинамічних параметрів систем перетворення геотермальної енергії

Ключові слова: математичне моделювання, геотермальна циркуляційна система, температурне поле, неізотермічна фільтрація.

Вступ. В умовах зростання попиту на енергетичні ресурси та виснаження запасів традиційних видів палива, альтернативна енергетика є найбільш перспективним напрямком в енергетичному балансі нашої країні. Україна має непогані перспективи для розвитку геотермальної електроенергетики. Перспективними є Закарпаття та Харківська область, де на глибині до 6000 м температура води становить 230…275 °С.

Основними перевагами геотермальних технологій є невичерпність енергії, незалежність виробництва електроенергії від пори року та умов навколишнього середовища, мінімальні викиди вуглекислого газу.

Актуальність дослідження. На сучасному етапі розвитку геотермальної енергетики найбільш ефективною вважається технологія видобування геотермальних ресурсів за допомогою циркуляційних систем. Їхня реалізація потребує вирішення раду задач, серед яких розробка надійної методики розрахунку параметрів підземного колектору.

Останні дослідження та публікації. У роботі [1] розглянуті процеси теплообміну і фільтрації в підземному проникному колекторі при закачуванні в нього рідини та отримано залежності просування температурного фронту. У роботі [2] наведені результати розрахунку задачі гідродинаміки і теплообміну в системі теплоносій-свердловина-гірський масив з урахуванням вертикального градієнта температури гірського масиву. Отримані на сьогодні аналітичні методи розрахунку процесу неізотермічної фільтрації рідини в підземному колекторі основані на ряді припущень та більшість з них є досить складними, що ускладнює їхнє практичне використання.

Формулювання цілей статті. Метою роботи є розробка методики чисельного розв'язання задачі неізотермічної фільтрації, яка базується на методі додаткових джерел.

Основна частина. Підземний проникний шар (колектор) – це пористе середовище, яке складається з частинок або блоків породи, що під дією гірського тиску щільно прилягають один до одного, утворюючи безперервну структуру, яка називається скелетом пласта.

Передача теплоти в пласті відбувається від частинки до частинки через рідину, що заповнює пори між частинками породи і через контакти між ними, що обумовлює ефективний коефіцієнті теплопровідності пласту.

Зазвичай приймають наступні припущення:

1. Проникний шар і оточуючий гірський масив однорідні і ізотропні;
2. Інтенсивність теплопритоків від підстилаючих і покриваючих порід оточуючого пласту гірського масиву однакові;
3. Розміри частинок породи та їх геометрична форма не змінюються вздовж осі координат;
4. Рідина рівномірно обтікає всі частинки породи і повністю заповнює пори.

З урахуванням цих припущень процес теплообміну і фільтрації записується наступним чином:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(K(T)\frac{\partial H}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(K(T)\frac{\partial H}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(K(T)\frac{\partial H}{\partial z}\right)=\frac{\mu}{m}\frac{\partial H}{\partial \tau}\,; \qquad (1)$$

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda(T)m\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda(T)m\frac{\partial T}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda(T)m\frac{\partial T}{\partial z}\right)-c\rho pm\upsilon_x\frac{\partial T}{\partial x}-\\&-c\rho pm\upsilon_y\frac{\partial T}{\partial y}-c\rho pm\upsilon_z\frac{\partial T}{\partial z}+\frac{w}{m}=\left(c_0\rho_0\left(1-p\right)+c\rho p\right)\frac{\partial T}{\partial \tau},\end{aligned} \qquad (2)$$

при $\tau = 0$; $T(x, y, z) = T_0(x, y, z)$; $H(x, y, z) = H_0(x, y, z)$,
де T – температура; $\lambda(T)$ – коефіцієнт теплопровідності водоносної породи; υ_x, υ_y, υ_z – проекції швидкості фільтрації на осі координат; τ – час; w – інтенсивність джерел теплоти; c, c_0 – питома теплоємність рідини та гірської породи; ρ, ρ_0 – густина рідини та гірської породи; p – пористість; $m = const$ – потужність пласту; $K(T)$ – коефіцієнт фільтрації; H – напір; μ – коефіцієнт пружноємності водоносних порід.

Граничні умови визначаються для конкретної задачі.

Покажемо, що в нелінійних диференціальних рівняннях теплопровідності (1) і фільтрації (2) можна виділити лінійну і нелінійну частини та представити їх у вигляді лінійних рівнянь з розподіленими джерелами, які враховують нелінійність

$$M\,(H\;T) = M_0\,(H) + Q_H\,(H\;T); \tag{3}$$

$$L\,(T\;H) = L_0\,(T) + Q_T\,(T\;H), \tag{4}$$

де $M_0\,(H)$, $L_0\,(T)$ – лінійні частини рівнянь теплопровідності та фільтрації відповідно; $Q_H\,(H\;T)$, $Q_T\,(T\;H)$ – розподілені джерела в рівняннях теплопровідності і фільтрації відповідно;

Після диференціювання рівнянь (1) і (2) запишемо їх у вигляді

$$K\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}+K\frac{\partial^2 H}{\partial y^2}+\frac{\partial K}{\partial x}\frac{\partial H}{\partial x}+\frac{\partial K}{\partial y}\frac{\partial H}{\partial y}=\frac{\mu}{m}\frac{\partial H}{\partial \tau}; \tag{5}$$

$$\begin{gathered}\lambda\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\lambda\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\partial \lambda}{\partial x}\frac{\partial T}{\partial x}+\frac{\partial \lambda}{\partial y}\frac{\partial T}{\partial y}-c\rho p\upsilon_x\frac{\partial T}{\partial x}-\\ -c\rho p\upsilon_y\frac{\partial T}{\partial y}+\frac{w}{m}=\left(c_0\rho_0\left(1-p\right)+c\rho p\right)\frac{\partial T}{\partial \tau}.\end{gathered} \tag{6}$$

Додамо й віднімемо від рівняння (6) $\lambda_{ф}\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\lambda_{ф}\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$ і згрупуємо подібні члени. Отримаємо

$$\lambda_{ф}\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\lambda_{ф}\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+Q_T=\left(c_0\rho_0\left(1-p\right)+c\rho p\right)\frac{\partial T}{\partial \tau}, \tag{7}$$

де $\lambda_Ф$ – фіксоване значення коефіцієнта теплопровідності в розглянутому діапазоні. Враховуючи, що $\upsilon_x=-\frac{K(T)}{p}\frac{\partial H}{\partial x}$ і $\upsilon_y=-\frac{K(T)}{p}\frac{\partial H}{\partial y}$, отримаємо

$$\begin{gathered}Q_T=\left(\lambda-\lambda_{ф}\right)\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right)+\frac{\partial \lambda}{\partial x}\frac{\partial T}{\partial x}+\frac{\partial \lambda}{\partial y}\frac{\partial T}{\partial y}-\\ -c\rho K(T)\left(\frac{\partial (H)}{\partial x}\frac{\partial T}{\partial x}-\frac{\partial (H)}{\partial y}\frac{\partial T}{\partial y}\right)+\frac{w}{m}.\end{gathered} \tag{8}$$

Додамо і віднімемо від рівняння (5) $K_\phi \dfrac{\partial^2 H}{\partial x^2} + K_\phi \dfrac{\partial^2 H}{\partial y^2}$ і згрупуємо подібні члени. Отримаємо

$$K_\phi \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + K_\phi \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} + \left(K - K_\phi\right)\left(\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2}\right) + \frac{\partial K}{\partial x}\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial K}{\partial y}\frac{\partial H}{\partial y} = \frac{\mu}{m}\frac{\partial H}{\partial \tau}, \tag{9}$$

де $K_Ф$ – фіксоване значення коефіцієнта фільтрації в розглянутому діапазоні.

Рівняння (9) запишемо у вигляді

$$K_\phi \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + K_\phi \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} + Q_H = \frac{\mu}{m}\frac{\partial H}{\partial \tau}, \tag{10}$$

де

$$Q_H = \left(K - K_\phi\right)\left(\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2}\right) + \frac{\partial K}{\partial x}\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial K}{\partial y}\frac{\partial H}{\partial y}. \tag{11}$$

У випадку лінійної залежності від температури коефіцієнта теплопровідності $\lambda = \lambda_Ф + \beta T$ і коефіцієнта фільтрації $K = K_Ф + \alpha T$, отримаємо

$$Q_T = \beta T\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right) + \beta\left[\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)^2\right] + c\rho\left(K_\phi + \alpha T\right)\left(\frac{\partial T}{\partial x}\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial y}\frac{\partial H}{\partial y}\right). \tag{12}$$

Величина Q_H матиме вигляд

$$Q_H = \alpha T\left(\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2}\right) + \alpha\left(\frac{\partial T}{\partial x}\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial y}\frac{\partial H}{\partial y}\right). \tag{13}$$

Для випадку, коли коефіцієнт теплопровідності λ не залежить від температури ($\lambda = \lambda_Ф = \text{const}$), а фільтрація стаціонарна ($K = K_Ф + \alpha T$)

$$Q_T = c\rho(K_\phi + \alpha T)(\frac{\partial T}{\partial x}\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial y}\frac{\partial H}{\partial y}). \qquad (14)$$

Рівняння (10) можна представити у вигляді

$$K_\phi \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + K_\phi \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} + Q_H = 0, \qquad (15)$$

де Q_H матиме вигляд

$$Q_H = \frac{K_\phi \alpha}{K_\phi + \alpha T}\left(\frac{\partial T}{\partial x}\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial y}\frac{\partial H}{\partial y}\right). \qquad (16)$$

Таким чином показано, що для різних залежностей коефіцієнта теплопровідності і коефіцієнта фільтрації від температури рівняння теплопровідності і фільтрації можна представити у вигляді

$$\lambda_\phi \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \lambda_\phi \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + Q_T = \left(c_0\rho_0\left(1-p\right) + c\rho p\right)\frac{\partial T}{\partial \tau}\,; \qquad (17)$$

$$K_\phi \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + K_\phi \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} + Q_H = \frac{\mu}{m}\frac{\partial H}{\partial \tau}\,, \qquad (18)$$

де Q_H і Q_T – члени рівнянь, що враховують нелінійність.

Q_H, Q_T будуть набувати різних значень, враховуючи залежності $\lambda = \lambda(T)$ і $K = K(T)$.

Проведемо дискретизацію рівняння (17) за часом і простором

$$\begin{aligned} &T_{i-1,j,n} + T_{i+1,j,n} + T_{i,j-1,n} + T_{i,j+1,n} - 4T_{i,j,n} + Q'_T = \\ &= \frac{c_0\rho_0 h^2}{\lambda_\phi \Delta\tau}(T_{i,j,n} - T_{i,j,n-1}), \end{aligned} \qquad (19)$$

де

$$\begin{aligned} Q_T = \frac{c\rho\left(K_\phi + \alpha T_{i,j,n}\right)}{4\lambda_\phi}\Big[&\left(T_{i+1,j,n} - T_{i-1,j,n}\right)\left(H_{i+1,j,n} - H_{i-1,j,n}\right) + \\ &+\left(T_{i,j+1,n} - T_{i,j-1,n}\right)\left(H_{i,j+1,n} - H_{i,j-1,n}\right)\Big]. \end{aligned} \qquad (20)$$

Для розв'язання рівняння (19) організуємо ітераційний процес

$$T_{i-1,j,n}^{m+1}+T_{i+1,j,n}^{m}+T_{i,j-1,n}^{m+1}+T_{i,j+1,n}^{m}=T_{xy};$$
$$\frac{T_{i+1,j,n}^{m}-T_{i-1,j,n}^{m+1}}{2}=\hat{T}_x;\quad \frac{T_{i,j+1,n}^{m}-T_{i,j-1,n}^{m+1}}{2}=\hat{T}_y;$$
$$\frac{H_{i+1,j,n}^{m}-H_{i-1,j,n}^{m+1}}{2}=\hat{H}_x;\quad \frac{H_{i,j+1,n}^{m}-H_{i,j-1,n}^{m+1}}{2}=\hat{H}_y;$$

отримаємо алгоритм переходу на новий ітераційний шар

$$T_{i,j,n}^{m+1}=\frac{T_{xy}+\dfrac{c_0\rho_0h^2}{\lambda_\phi\Delta\tau}T_{i,j,n-1}+Q_T'}{4+\dfrac{c_0\rho_0h^2}{\lambda_\phi\Delta\tau}}. \tag{21}$$

З урахуванням (20) остаточно отримаємо

$$T_{i,j,n}^{m+1}=\frac{T_{xy}+\dfrac{c_0\rho_0h^2}{\lambda_\phi\Delta\tau}T_{i,j,n-1}+\dfrac{c\rho\left(k_\phi+\alpha T_{i,j,n}\right)}{4\lambda_\phi}\left(\hat{T}_x\hat{H}_x+\hat{T}_y\hat{H}_y\right)}{4+\dfrac{c_0\rho_0h^2}{\lambda_\phi\Delta\tau}}. \tag{22}$$

Проведемо дискретизацію за часом і простором рівняння (18)

$$H_{i-1,j,n}+H_{i+1,j,n}+H_{i,j-1,n}+H_{i,j+1,n}-4H_{i,j,n}+Q_H'=0, \tag{23}$$

де

$$\begin{aligned}Q_H=\frac{\alpha}{4K_\phi}\Big[&\left(H_{i+1,j,n}-H_{i-1,j,n}\right)\left(T_{i+1,j,n}-T_{i-1,j,n}\right)+\left(H_{i,j+1,n}-H_{i,j-1,n}\right)\times\\ &\times\left(T_{i,j+1,n}-T_{i,j-1,n}\right)\Big]+\frac{\alpha T_{i,j,n}}{K_\phi}\left(H_{i-1,j,n}+H_{i+1,j,n}+H_{i,j-1,n}+H_{i,j+1,n}\right).\end{aligned} \tag{24}$$

Для розв'язання рівняння (23) організуємо ітераційний процес

$$H_{i-1,j,n}^{m+1}+H_{i+1,j,n}^{m}+H_{i,j-1,n}^{m+1}+H_{i,j+1,n}^{m}=H_{xy};\qquad H_{xy}-4H_{i,j,n}^{m}=\hat{\hat{H}},$$

звідки отримаємо алгоритм переходу на наступний ітераційний шар

$$H_{i,j,n}^{m+1} = \frac{H_{xy} + Q'_H}{4} .$$

Враховуючи (24), отримаємо

$$H_{i,j,n}^{m+1} = \frac{H_{xy} + \frac{\alpha}{K_\phi}\left(\hat{H}_x \hat{T}_x + \hat{H}_y \hat{T}_y\right) + \frac{\alpha T_{i,j,n}}{K_\phi} \hat{\hat{H}}}{4} . \qquad (25)$$

Проведена оцінка стабільності розв’язання задач неізотермічної фільтрації показала, що існують інтервали значень параметрів, які входять до рівняння, при яких розв’язок абсолютно стабільний. За межами інтервалу абсолютної стабільності оцінка дозволяє визначити відношення $\Delta\tau / h^2$, при якому рішення стабільно.

Висновки. Запропонована методика дозволить розраховувати переміщення температурного поля в підземному колекторі.

Перспективи подальших досліджень. Верифікація методики буде проведена в подальших дослідженнях шляхом проведення аналітичного розв’язання та зіставлення отриманих даних з результатами комп’ютерного моделювання.

Література

1. Басок Б. И. Теплообмен и динамика жидкости, закачиваемой в геотермальный водоносный пласт / Б. И. Басок, Т. А. Резакова // Энерготехнологии и ресурсосбережение. – 2011. - № 5. – с. 59-62.

2. Резакова Т. А. Расчет теплообмена в геотермальной скважине / Т. А. Резакова // Відновлювана енергетика. – 2011. – № 1. – с. 77-81.

References

1. Basok B. Y. , Rezakova T. A. “Teploobmen i dinamika zhidkosti, zakachivaemoi v heotermalnyi vodonosnyi plast.” *Enerhotekhnolohii i resursosberezhenie*, no.5, 2011, pp. 59-62.

2. Rezakova T. A. “Raschet teploobmena v heotermalnoi skvazhine.” *Vidnovliuvana enerhetyka*, no.1, 2011, pp. 77-81.

УДК 620.91:004.94

Численное решение задач однофазной неизотермической фильтрации

І. Э. Фуртат[1], О. М. Кравчук[2]

[1]к.т.н., доц. НТУУ «КПИ им. И. Сикорского», г. Киев, Украина, i.e.furtat@gmail.com

[2]студ. НТУУ «КПИ им. И. Сикорского», г. Киев, Украина, o.m.kravchuk@ukr.net

Аннотация. Создание геотермальных циркуляционных систем предполагает прогнозную оценку эффективности их работы. Важное место в этом занимают исследования процессов тепломассопереноса в подземном коллекторе численным методом. В данной работе рассмотрена математическая модель процесса теплообмена и фильтрации термальной воды в пласте и предложена методика численного решения задачи неизотермической фильтрации, основанная на методе дополнительных источников. Метод заключается в том, что в нелинейных дифференциальных уравнениях теплопроводности и фильтрации можно выделить линейную и нелинейную части и представить их в виде линейных уравнений с распределёнными источниками. Верификация данной методики будет проведена в дальнейших исследованиях. Результаты работы могут быть использованы для определения и совершенствования термодинамических параметров систем преобразования геотермальной энергии.

Ключевые слова: математическое моделирование, геотермальная циркуляционная система, температурное поле, неизотермических фильтрация.

UDC 620.91:004.94

Numerical Solution of Problems of Single-Phase Non-Isothermal Filtration

I. Furtat[1], O. Kravchuk[2]
[1]Candidate of Engineering Sciences NTUU "Igor Sikorsky KPI", Kyiv, Ukraine, i.e.furtat@gmail.com
[2]student NTUU "Igor Sikorsky KPI", Kyiv, Ukraine, o.m.kravchuk@ukr.net.

Abstract. Creating a geothermal circulation system requires predictable assessment of its efficiency. It is important in this process to research heat and mass transfer processes in an underground reservoir by a numerical method. In this paper, the mathematical model of heat transfer and filtration of thermal water in the reservoir is considered, and the method for numerical solving the problem of non-isothermal filtration is proposed, based on method of additional sources. The method consists in the fact that in the nonlinear differential equations of heat and filtration the linear and nonlinear parts can be selected and they can be presented in the form of linear equations with distributed sources. Verification of this methodology will be done in future studies. The results can be used to determine and improve the thermodynamic parameters of converting geothermal energy.

Keywords: mathematical modelling, geothermal circulation system, temperature field, non-isothermal filtration.

Надійшла до редакції 18 квітня 2017 р.